ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von A. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, H. MÜLLER-BRESLAU-Charlottenburg, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

: Band 4 : :: Heft 3 ::
Juni 1924 Seite 193 bis 276

INHALT:

V·D·I-VERLAG G.M.B.H., BERLIN SW 19

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 4 **Ende Juni 1924** **Heft 3**

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Anwendungen der Motorrechnung.

Von **R. v. MISES** in Berlin.

Die folgende Arbeit schließt sich unmittelbar an den im letzten Heft veröffentlichten Aufsatz »Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik« an. Auf die beiden Teile jenes Aufsatzes ist durch den Hinweis I bezw. II unter Beifügung der Nummer des Abschnittes oder der Gleichung regelmäßig verwiesen.

Bei der Auswahl der Beispiele und der Abgrenzung des Umfanges, in dem sie behandelt wurden, war der Gesichtspunkt maßgebend, daß nicht nur alte Resultate neu abgeleitet werden sollten; vielmehr war es mein Bestreben, soweit es mit dem eigentlichen Ziel, der Veranschaulichung und Erläuterung des neuen Rechnungsverfahrens, verträglich schien, die Kraft und Tragweite der Methode dadurch zu erweisen, daß über das auf anderen Wegen Gewonnene hinausgegangen wurde. Auf Ausführung von Einzelheiten mußte dabei natürlich verzichtet werden. In den beiden ersten Abschnitten werden die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers in solcher Allgemeinheit entwickelt, daß sie beispielsweise den Fall eines körperlich ausgedehnten Foucault-Pendels, selbst bei Berücksichtigung der ungleichförmigen Translationsbewegung der Erde, umfassen. Der dritte Abschnitt bringt eine mehr grundsätzliche Ueberlegung, die für den systematischen Aufbau der Mechanik von Interesse sein dürfte. In den Abschnitten **4** bis **6** gebe ich eine kurze Skizze für die Behandlung des allgemeinsten Gleichgewichtsproblems der Baumechanik; für räumliche Systeme, die in ganz beliebiger Weise aus elastischen Stäben zusammengesetzt sind, sodaß alle Spezialfälle des Fachwerkes mit gelenkigen oder steifen Knoten, des Rahmentragwerkes, durchlaufenden Trägers mit eingeschlossen sind, werden die Gleichgewichtsbedingungen und die allgemeinen Sätze über Formänderungsarbeit usf. einheitlich begründet. Der siebente und achte Abschnitt beschäftigt sich mit zwei hydrodynamischen Aufgaben, die in den üblichen Darstellungen meist recht schlecht wegkommen, mit der Berechnung der sog. »Aktion« und »Reaktion« strömenden Wassers und den Bewegungsgleichungen eines starren Körpers in einer idealen Flüssigkeit. Der neunte Abschnitt bespricht kurz die Bewegungsgleichungen eines Luftfahrzeuges, die, wie man weiß, beim Uebergang zur Betrachtung kleiner

Schwingungen in gewissen Fällen in zwei unabhängige Gruppen, die Gleichungen der Längs- und Querbewegung, zerfallen. Dies gibt dann den Anlaß, um im letzten Abschnitt kurz auf die mehr geometrisch gerichtete Frage nach den dreidimensionalen Untergruppen des allgemeinen Motorbegriffes einzugehen, wobei die Fragen der Statik starrer Körper in den Vordergrund treten.

1. Grundgleichungen für den starren Körper. Wir gehen von folgenden Grundtatsachen der Mechanik starrer Körper aus. Bewegt sich ein starrer Körper, so liefern in jedem Augenblick die an ihm angreifenden Kräfte in ihrer Gesamtheit einen Kraftmotor, eine Dyname oder Kraftschraube $\mathfrak{K}$. Der augenblickliche Geschwindigkeitszustand wird durch einen Geschwindigkeitsmotor oder eine Bewegungsschraube $\mathfrak{G}$ bestimmt, deren erste Vektorkomponente die Drehungs-, deren zweite die Translationsgeschwindigkeit ist. Schließlich wird die Massenträgheit durch eine spezielle symmetrische Motordyade, die Trägheitsdyade T dargestellt, deren 36 gliedriges Schema schon in II **3** gekennzeichnet wurde. Diese drei Größen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{G}$ und T sind nun durch ein Grundgesetz miteinander verbunden, das in vollkommener Analogie zur einfachen lex secunda Newtons für den »materiellen Punkt« steht und das wir zunächst in folgender Form anschreiben:

$$\mathsf{T} \cdot \mathfrak{G} = \mathfrak{J}, \qquad \frac{d\,\mathfrak{J}}{d\,t} = \mathfrak{K} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1);$$

in Worten: Das Produkt der Trägheitsdyade in den Geschwindigkeitsmotor heißt Impulsmotor; die Ableitung des Impulsmotors nach der Zeit ist gleich dem Kraftmotor.

Zur Erläuterung von (1) diene noch folgende Bemerkung. Nach der Erklärung, die in II **3** für die Trägheitsdyade gegeben wurde, kann man ihr Produkt mit $\mathfrak{G}$ auch so auffassen: Wenn der starre Körper in Massenelemente dm zerlegt und jedem solchen Element mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$ seine »Bewegungsgröße« $\mathfrak{v}\,dm$ als spezieller Motor (Stab, Rotor) »angeheftet« wird, so ist $\mathfrak{J}$ die Summe aller dieser Elementar-Motoren, d. h. die erste Vektorkomponente $\mathfrak{J} = \int \mathfrak{v}\,dm$, die zweite $\mathfrak{J}_o = \int (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v})\,dm$. In gleicher Weise ist die Ableitung von $\mathfrak{J}$ nach der Zeit als die Motorsumme der den einzelnen Massenteilchen »angehefteten« Masse-mal-Beschleunigungs-Produkte $\mathfrak{w}\,dm$ zu deuten. Für die erste Vektorkomponente ist das unmittelbar klar, denn aus $\int \mathfrak{v}\,dm$ geht durch Differentiation eben $\int \mathfrak{w}\,dm$ hervor. Für die zweite muß man beachten, daß die Ableitung des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ nach der Zeit $\mathfrak{v}$ ist und daß das Vektorprodukt $\mathfrak{v} \times \mathfrak{v}$ verschwindet. Es ist somit

$$\frac{d}{d\,t}\int (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v})\,dm = \int (\mathfrak{r} \times \mathfrak{w})\,dm + \int \left(\frac{d\,\mathfrak{r}}{d\,t} \times \mathfrak{v}\right) dm = \int (\mathfrak{r} \times \mathfrak{w})\,dm.$$

Also hat in der Tat die linke Seite der zweiten Gl. (1) die Vektorkomponenten $\int \mathfrak{w}\,dm$ und $\int (\mathfrak{r} \times \mathfrak{w})\,dm$.

Für einen materiellen Punkt reduziert sich der Kraft- bezw. Geschwindigkeitsmotor auf Kraft- und Geschwindigkeitsvektor, die Trägheitsdyade auf die skalare Massenzahl. Die Gl. (1) besagen dann: Das Produkt von Masse in Geschwindigkeitsvektor nach der Zeit differenziert ist gleich dem Kraftvektor. Im allgemeinen Fall des endlich ausgedehnten starren Körpers ist der Ansatz (1) — wobei man $\mathfrak{J}$ aus der ersten Gleichung in die zweite eingesetzt zu denken hat — zwei Vektorgleichungen aequivalent, von denen die eine den sog. Schwerpunktsatz, die andere den Flächensatz zum Ausdruck bringt; darauf kommen wir später (**2**) zurück.

Aus (1) soll zunächst eine allgemeine skalare Beziehung abgeleitet werden, die das Energiegesetz oder die Gleichung der lebendigen Kraft genannt wird. Zu diesem Zweck führen wir, im Anschluß an die übliche Benennungsweise folgende Bezeichnungen ein. Es heiße das skalare Produkt von Kraft- und Geschwindigkeitsmotor die Leistung und das halbe skalare Produkt von Geschwindigkeits- und Impulsmotor die lebendige Kraft oder kinetische Energie:

$$\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{G} = L, \qquad {}^1/_2\, \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{J} = E \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Wenn man die zweite Gl. (1) skalar mit $\mathfrak{G}$ multipliziert, erscheint rechts L und links das skalare Produkt $\mathfrak{G} \cdot d\mathfrak{J}/dt$, von dem wir nachweisen wollen, daß es der Ableitung von E gleichkommt. Wir haben nämlich

$$\frac{d\,E}{dt} = \frac{d}{d\,t}\left({}^1/_2\, \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{J}\right) = {}^1/_2\, \mathfrak{G}\, \frac{d\,\mathfrak{J}}{dt} + {}^1/_2\, \mathfrak{J}\, \frac{d\,\mathfrak{G}}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

und es läßt sich leicht einsehen, daß die beiden Summanden rechts einander gleich sind. Denn nach der am Schluß von I **7** erwähnten und in II **7** nochmals abgeleiteten Rechnungsregel gilt für jeden Motor $\mathfrak{A}$ die Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{d'\mathfrak{A}}{dt} + (\mathfrak{S} \times \mathfrak{A}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4),$$

wenn d'/dt die »scheinbare« Ableitung nach der Zeit, d. h. die von dem mit $\mathfrak{S}$ bewegten System aus beurteilte Veränderung nach der Zeit bezeichnet. Man hat daher

$$\mathfrak{S}\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = \mathfrak{S}\frac{d'\mathfrak{J}}{dt} + \mathfrak{S}(\mathfrak{S} \times \mathfrak{J}) = \mathfrak{S}\left(\mathsf{T}\frac{d'\mathfrak{S}}{dt}\right) = \mathfrak{S}\left(\mathsf{T}\frac{d\mathfrak{S}}{dt}\right) = \frac{d\mathfrak{S}}{dt}\mathfrak{J} \quad . \; . \quad (5).$$

Das erste Gleichheitszeichen folgt unmittelbar aus der Anwendung von (4) auf $\mathfrak{J}$; das zweite ergibt sich, wenn man bedenkt, daß T vom bewegten Körper aus betrachtet, konstant ist und andererseits das ternäre Produkt zufolge der Vertauschungsregel I (10) und wegen $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S} = 0$ verschwindet. Die Gleichheit von $d\mathfrak{S}/dt$ und $d'\mathfrak{S}/dt$ ist ebenfalls eine Folge von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S} = 0$ und der Beziehung (4), das letzte Gleichheitszeichen endlich fließt aus der Symmetrie von T nach II (49). Das erste und letzte Glied von (5) sind nun in der Tat die beiden Bestandteile der Ableitung von E in (3), sodaß wir die Identität

$$\frac{dE}{dt} = \mathfrak{S}\frac{d\mathfrak{J}}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3')$$

bewiesen haben. Die skalare Multiplikation der Newtonschen Gleichung (1) mit $\mathfrak{S}$ liefert somit

$$\frac{dE}{dt} = L \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6);$$

in Worten: Die Leistung der am Körper angreifenden Kräfte ist in jedem Augenblick gleich dem Zuwachs der lebendigen Kraft für die Zeiteinheit.

Für manche Zwecke wird es nützlich sein, wenn wir die Komponenten-Darstellung für E, L und $\mathfrak{J}$ angeben. Wir wollen dabei der Uebersichtlichkeit zu Liebe die Bezeichnungen gegenüber denen der allgemeinen Untersuchungen in I und II etwas ändern. Die drei Komponenten der Kraft-Resultierenden $\mathfrak{K}$ mögen X, Y, Z, die des Momentes $\mathfrak{K}_o = \mathfrak{M}$ für den Bezugspunkt o mögen M_x, M_y, M_z heißen; analog seien u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten des Punktes o (Vektor $\mathfrak{v}$) und ω_x, ω_y, ω_z die der Drehgeschwindigkeit ω. Die Trägheits- bezw. Deviationsmomente bezeichnen wir mit T_x, T_y, T_z bezw. D_x, D_y, D_z, die Schwerpunktskoordinaten mit a, b, c (Vektor $\mathfrak{r}$). Der Ausdruck für die Leistung L lautet dann

$$L = Xu + Yv + Zw + M_x\omega_x + M_y\omega_y + M_z\omega_z = \mathfrak{K}\mathfrak{v} + \mathfrak{M}\omega \quad . \; . \; . \quad (7).$$

Die Trägheitsdyade hat das Schema

$$\left\{\begin{matrix} m & 0 & 0 & 0 & mc & -mb \\ 0 & m & 0 & -mc & 0 & mx \\ 0 & 0 & m & mb & -mx & 0 \\ 0 & -mc & mb & T_x & -D_z & -D_y \\ mc & 0 & -ma & -D_z & T_y & -D_x \\ -mb & ma & 0 & -D_y & -D_x & T_z \end{matrix}\right\} \quad . \; . \quad (8).$$

Die skalaren Komponenten des Impulses sind nach II (14):

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= m(u + c\omega_y - b\omega_z), & J_4 &= T_x\omega_x - D_z\omega_y - D_y\omega_z + m(bw - cv), \\ J_2 &= m(v - c\omega_x + a\omega_z), & J_5 &= T_y\omega_y - D_x\omega_z - D_z\omega_x + m(cu - aw), \\ J_3 &= m(w - a\omega_y + b\omega_x), & J_6 &= T_z\omega_z - D_y\omega_x - D_x\omega_y + m(av - bu) \end{aligned}\right\} \quad (9).$$

Nur wenn der Bezugspunkt o der Schwerpunkt ist, hängen die drei ersten Impulskomponenten allein von der Translationsgeschwindigkeit, die drei letzten allein von der Drehgeschwindigkeit ab. Die ersteren werden zu mu, mv, mw, den Komponenten des Vektors $m\mathfrak{v}$, der oft schlechthin die »Bewegungsgröße« heißt. Wählt man überdies die Achsenrichtungen so, daß sie Trägheits-Hauptachsen (freie Achsen) des Körpers sind, so erhält man auch für die zweite Gruppe der Impulskomponenten ebenso einfache Ausdrücke, nämlich $T_x\omega_x$, $T_y\omega_y$, $T_z\omega_z$.

Den expliziten Ausdruck für $2E$ erhält man nach der Definition (2) in der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} 2E = m(u^2 + v^2 + w^2) + T_x\omega_x^2 + T_y\omega_y^2 + T_z\omega_z^2 \\ + 2m[a(v\omega_z - w\omega_y) + b(w\omega_x - u\omega_z) + c(u\omega_y - v\omega_x)] \\ - 2[D_x\omega_y\omega_z + D_y\omega_z\omega_x + D_z\omega_x\omega_y] \end{aligned}\right\} \quad . \quad (10).$$

Die zweite Gruppe von Gliedern mit dem gemeinsamen Faktor $2m$ fällt fort, wenn der Schwerpunkt Bezugspunkt wird, die letzte Gruppe, wenn die Koordinatenrichtungen Hauptrichtungen sind. Die Mittelgruppe gestattet verschiedene Umstellungen, da sie das ternäre Produkt $2m\,\mathfrak{r}(\mathfrak{v}\times\omega) = 2m\,\mathfrak{v}(\omega\times\mathfrak{r}) = 2m\,\overline{\omega}(\mathfrak{r}\times\mathfrak{v})$ darstellt.

2. Allgemeine Formen der Bewegungsgleichung. Die zweite der Gl. (1), in die wir uns $\mathfrak{J}$ aus der ersten eingesetzt zu denken haben, stellt, wie gesagt, in motorischer Form die (sechs Skalargleichungen aequivalente) Bewegungsgleichung eines starren Körpers vor. Um ihre Komponentenzerlegung für irgend ein festes oder bewegliches Bezugssystem zu erhalten, braucht man nur in rein schematischer Weise die Rechenregeln der Motoranalysis anzuwenden. Wir wählen zunächst ein mit dem bewegten Körper fest verbundenes, sonst beliebiges Achsenkreuz und denken uns die in **1** eingeführten Komponenten-Bezeichnungen auf dieses bezogen. Indem wir von der Differentiationsregel (4) Gebrauch machen, erhalten wir aus (1)

$$\mathrm{T}\frac{d'\mathfrak{G}}{dt} + \mathfrak{G}\times(\mathrm{T}\mathfrak{G}) = \mathfrak{K} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11).$$

Die Komponenten des in der Klammer stehenden Motors $\mathfrak{J}$ sind schon in (9) zusammengestellt, so daß die Komponenten des zweiten Summanden links in (11) sofort aus I (4) folgen; die des ersten findet man unmittelbar aus den Komponenten von $\mathfrak{J}$, indem man in jedem der 6 Ausdrücke (9) die $u, v, w, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ durch die Ableitungen $\dot{u}, \dot{v}$ usw. ersetzt. Es wird genügen, hier die erste und vierte Komponentengleichung anzuschreiben, da die anderen durch zyklische Vertauschung ohne weiteres aus ihnen hervorgehen:

$$m(\dot{u} + c\dot{\omega}_y - b\dot{\omega}_z) + m\omega_y(w - b\omega_x + a\omega_y) - m\omega_z(v - c\omega_x + a\omega_z) = X \quad (12\,\mathrm{a})$$

. . . .

$$T_x\dot{\omega}_x - D_z\dot{\omega}_y - D_y\dot{\omega}_z + m(b\dot{w} - c\dot{v}) + (T_z - T_y)\,\omega_y\omega_z + D_x(\omega_z^2 - \omega_y^2)$$
$$+ \omega_x(D_z\omega_z - D_y\omega_y) + m\omega_x(cw + bv) - mu(c\omega_z + b\omega_y) = M_x \quad (12\,\mathrm{b})$$

. . . .

Die erste der angeschriebenen Gleichungen läßt die oben angedeutete Entstehung unmittelbar erkennen, in der zweiten sind in den aus $\mathfrak{G}\times\mathfrak{J}_0 + \mathfrak{G}_0\times\mathfrak{J}$ hervorgehenden Gliedern einige Zusammenziehungen vorgenommen worden. Wählt man den Schwerpunkt zum Anfangspunkt der Koordinaten, so geht die linke Seite von (12a) in die Komponente des Vektors

$$m\left(\frac{d'\mathfrak{v}}{dt} - \mathfrak{v}\times\overline{\omega}\right) = m\,\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$$

über, so daß (12a) die bekannte Schwerpunktsgleichung $m\,d\mathfrak{v}/dt = \mathfrak{K}$ bildet. Aus (12b) gewinnt man die geläufige Form der Eulerschen Gleichungen $T_x\dot{\omega}_x + (T_z - T_y)\,\omega_y\omega_z = M_x$, wenn man überdies auch die Achsenrichtungen mit den Schwerpunkts Hauptachsen zusammenfallen läßt. Die allgemeine Form (12a), (12b) der Bewegungsgleichungen bezw. ihrer linken Seiten ist von K. Heun auf Grund vektorieller Ableitungen angegeben worden, doch sind seine Resultate durch einige Rechenfehler entstellt[1]).

Man kann (12a) und (12b) auch etwas anders ableiten, indem man unter Umgehung von (4) unmittelbar die Differentiation an (1) ausführt:

$$\mathrm{T}\frac{d\mathfrak{G}}{dt} + \frac{d\mathrm{T}}{dt}\mathfrak{G} = \mathfrak{K} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13).$$

Der erste Summand gibt in der gleichen Weise wie früher (da, wie schon in **1** erwähnt, $d\mathfrak{G}/dt$ mit $d'\mathfrak{G}/dt$ identisch ist) die eigentlichen Beschleunigungsglieder. Die Komponenten des zweiten erhält man als das Produkt der Dyade, deren Elemente in II (39) angeschrieben wurden, in den Geschwindigkeitsmotor. Man sieht jetzt, da (11) mit (13) übereinstimmen muß, daß für das in II **7** eingeführte dyadische Produkt von Motor und Dyade die Rechenregel besteht:

$$(\mathfrak{G}\times\Pi)\,\mathfrak{G} = \mathfrak{G}\times(\Pi\,\mathfrak{G}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14).$$

---

[1]) K. Heun, Lehrbuch der Mechanik I, Leipzig 1906, S. 271. Gegenüber (12b) sind hier die Vorzeichen der Glieder $D_x\omega_y^2$ und $D_z\omega_x\omega_z$ verkehrt, ferner mehrere Indices der letzten Glieder vertauscht. In der Encykl. d. math. Wissensch. IV, Art. 11 (K. Heun) S. 398 stimmen einzelne Vorzeichen der ersten Gleichungsgruppe nicht mit (12a) überein.

Die Gl. (12) stellen noch nicht die größte erreichbare oder erforderliche Allgemeinheit dar. In vielen Fällen der Bewegung starrer Körper, z. B. beim Foucaultschen Pendel, beim Fahrzeugkreisel, beim Kreiselkompaß will man ein Bezugssystem benutzen, das eine von dem zu untersuchenden Körper unabhängige Bewegung ausführt, wie die rotierende Erde, das bewegte Fahrzeug, das schwankende Schiff usf. Wir wollen also jetzt annehmen, der Motor $\mathfrak{R}$ bestimme die relative Geschwindigkeit des Körpers gegenüber einem Achsenkreuz, dessen Bewegung durch den Motor $\mathfrak{F}$ der Führungsgeschwindigkeit gegeben ist, so daß die absolute Geschwindigkeit

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F} + \mathfrak{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Setzen wir dies in (1) ein und benutzen (4), so wird

$$\mathsf{T}\frac{d'\mathfrak{F}}{dt} + \mathsf{T}\frac{d'\mathfrak{R}}{dt} + (\mathfrak{F} + \mathfrak{R}) \times (\mathsf{T}\mathfrak{F} + \mathsf{T}\mathfrak{R}) = \mathfrak{K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Nun wird man aber in der Regel die Aenderung der Führungsgeschwindigkeit nicht von dem zu untersuchenden, bewegten Körper aus, sondern vom ruhenden Raum, oder, was auf dasselbe hinausläuft, vom bewegten Bezugssystem aus beurteilen, d. h. die Ableitung $d\mathfrak{F}/dt$ an Stelle von $d'\mathfrak{F}/dt$ benutzen wollen. Dies bedingt, daß man nach (4) noch das Produkt $\mathsf{T}(\mathfrak{R} \times \mathfrak{F})$ in (16) einzuführen hat. Ordnen wir noch so um, daß zuerst nur die von der Relativbewegung, dann die von der Führungsbewegung abhängigen, zuletzt die gemischten Glieder (»Coriolis«-Beschleunigung) erscheinen, so erhalten wir:

$$\left[\mathsf{T}\frac{d'\mathfrak{R}}{dt} + \mathfrak{R} \times (\mathsf{T}\mathfrak{R})\right] + \left[\mathsf{T}\frac{d\mathfrak{F}}{dt} + \mathfrak{F} \times (\mathsf{T}\mathfrak{F})\right]$$
$$+ [\mathfrak{F} \times (\mathsf{T}\mathfrak{R}) + \mathfrak{R} \times (\mathsf{T}\mathfrak{F}) - \mathsf{T}(\mathfrak{R} \times \mathfrak{F})] = \mathfrak{K} \quad (17).$$

Das Anschreiben der Komponentengleichungen kann ganz schematisch erfolgen. Nehmen wir beispielshalber an, das im Körper festliegende Achsenkreuz falle mit den Trägheits-Hauptachsen zusammen und die Führungsgeschwindigkeit sei unveränderlich (etwa wie die Drehgeschwindigkeit der Erde). Ferner seien jetzt mit $u, v, w, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ die Komponenten der Relativbewegung, mit den gleichen gestrichelten Buchstaben die der Führungsbewegung bezeichnet. Dann liefert (17) die Gleichungen:

$$m[\dot{u} + \omega_y w - \omega_z v + \omega'_y w' - \omega_z' v' + 2(\omega_y' w - \omega_z' v)] = X \quad . \quad . \quad . \quad (17\,a),$$

. . . .

$$T_x(\dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z' + \omega_z \omega_y') + (T_z - T_y)(\omega_y + \omega_y')(\omega_z + \omega_z') = M_x \quad . \quad . \quad (17\,b).$$

. . . .

Will man das physische Foucault-Pendel (d. h. die Schwinung eines mit der rotierenden Erde in einem Punkte verbundenen starren Körpers) behandeln, so wird man besser den Aufhängepunkt, für den $u = v = w = 0$ ist, zum Bezugspunkte wählen. Hat dann der Schwerpunkt im Koordinatensystem, das immer noch als Hauptachsenkreuz für den Bezugspunkt vorausgesetzt wird, die Koordinaten $0, 0, c$, so treten in der ersten Momentengleichung die Glieder $mc(w'\omega_x' - u'\omega_z')$, in der zweiten $mc(w'\omega_y' - v'\omega_z')$ hinzu, während die dritte unverändert bleibt. Der allgemeine Ansatz (17) ist ganz besonders geeignet für den Fall, daß außer der Erdrotation auch die fortschreitende Bewegung der Erde in der Ekliptik berücksichtigt werden soll.

3. Grundlegung der Mechanik der Kontinua. Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen stetig deformierbarer Körper meinte man früher mit einer sinngemäßen Übertragung des Newtonschen Axioms: Masse mal Beschleunigung gleich Kraft, auf das Volumelement das Auslangen finden zu können. An Stelle der Masse des von Newton betrachteten »materiellen Punktes« trat die spezifische Masse, an Stelle der Kraftresultierenden die auf die Volumeinheit bezogene spezifische Kraft, z. B. das spezifische Gewicht als Länge eines vertikal abwärts gerichteten Vektors. Erst Boltzmann und nach ihm Hamel[1]) haben klar erkannt, daß man mit diesem einen Axiom nicht auskommt, sondern eine davon unabhängige Annahme, die in irgend einer Form den »Momentensatz« oder »Flächensatz« mit sich bringt, einführen muß. Wir sind in der Lage, mit den Hilfsmitteln der Motoranalysis diese Ableitung etwas einheitlicher und einfacher zu gestalten und benutzen dies dazu, um die Grundlagen der Mechanik der Kontinua auch sachlich

[1]) Vergl. G. Hamel, Mathem. Annalen 66, 1908, S. 350 und L. Boltzmann, Populär-wissensch. Schriften, Leipzig 1905, S. 298.

zu erweitern, in einer Richtung, die möglicherweise für die Anwendungen noch einmal von Bedeutung werden könnte.

Bei einem Körper, dessen einzelne Teile nicht starr miteinander verbunden sind, verliert der Begriff des Geschwindigkeitsmotors und damit der der Trägheitsdyade seinen Sinn. Es gibt für jeden Punkt des Körpers nur einen Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ und eine spezifische Masse μ, gleich dem Grenzwert $dm : dV$ des Quotienten Masse durch Volumen. Man kann aber nichtsdestoweniger den Impulsmotor $\mathfrak{J}$ eines solchen Körpers definieren, wenn man die in **1** gegebene zweite Erklärung von $\mathfrak{J}$ gelten läßt: Es stellt $\mathfrak{J}$ die »Motorsumme« der an den einzelnen Massenteilchen »angehefteten« Stäbe (spezialisierter Motoren) $\mathfrak{v}\,dm$ dar und demgemäß $d\mathfrak{J}/dt$ (vergl. dazu die eben angeführte Stelle) die analoge über $\mathfrak{w}\,dm$ erstreckte Summe, wenn $\mathfrak{w}$ den Beschleunigungsvektor des Massenelementes dm bezeichnet. Zur Mechanik der Kontinua führt dann der folgende Satz, den wir das »erweiterte« Newtonsche Gesetz nennen können: Für jeden Teil eines beliebigen Körpers ist die Ableitung des Impulsmotors nach der Zeit gleich dem Kraftmotor, wobei dieser durch Summierung aller äußeren, an den Volumelementen sowohl wie an den Oberflächenelementen des Körperteiles angreifenden Kräfte und Momente zu bilden ist. Es fällt also nur die erste der Gl. (1) des starren Körpers fort, und für die zweite kann geschrieben werden:

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = \mathfrak{K}^F + \mathfrak{K}^V \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18),$$

womit gleich auf die Zerfällung in Volum- und Oberflächenkräfte hingewiesen ist. Daß der Ansatz (18) oder die oben in Worten gegebene Formulierung nicht ausreicht, wenn wir statt der Motoren die Vektoren betrachten, ist der wesentliche Inhalt der gegenwärtigen Ueberlegung. Die allgemeinste Bewegungsgleichung eines deformierbaren Körpers entsteht, wenn man Gl. (18) auf ein Volumelement anwendet.

Von den Volum- und Oberflächenkräften, die in (18) auftreten, bilden wir uns folgende, gegenüber der üblichen etwas erweiterte, Vorstellung. Es sei zunächst (Abb. 1) a ein beliebiger Punkt im Innern des Körpers und V ein a einschließender Raumteil. Alle auf die Punkte von V wirkenden Volumkräfte ergeben den Motor $\mathfrak{K}^V$, der etwa auf a als Bezugspunkt reduziert sein mag. Wird nun V mehr und mehr verkleinert, während a immer ein innerer Punkt bleibt, so nehmen wir an, es existiere der Grenzwert $\mathfrak{K}^V : V$; dieses ist der »spezifische Kraftmotor« für den Punkt a, dessen Vektorkomponenten, bezogen auf a, mit $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{m}$ bezeichnet seien. In der Regel hat man es nur mit Kräften zu tun, für die die zweite (auf a bezogene) Vektorkomponente dieses Motors verschwindet, es steht aber dem nichts im Wege, sich etwa magnetische Wirkungen in der Form »spezifischer Kraftmomente« vorzustellen. In ähnlicher Weise soll für einen Punkt b auf der Oberfläche des in (18) betrachteten Körperteiles folgendes gelten: Ist $\mathfrak{K}^F$ der resultierende Kraftmotor für alle auf einem Flächenstück F, das b umschließt, angreifenden Kräfte, so existiert der Grenzwert $\mathfrak{K}^F : F$, wenn man F an der Stelle b zusammenzieht; diesen Grenzwert nennen wir den Spannungsmotor für das durch seine Normalenrichtung näher bestimmte Flächenelement in b. Die Verallgemeinerung gegenüber dem gebräuchlichen Ansatz ist wieder die gleiche wie früher. Die auf b bezogenen Vektorkomponenten des Spannungsmotors bezeichnen wir mit $\mathfrak{p}_\nu$ und $\mathfrak{q}_\nu$, wobei ν auf die Richtung des Flächenelementes hinweist.

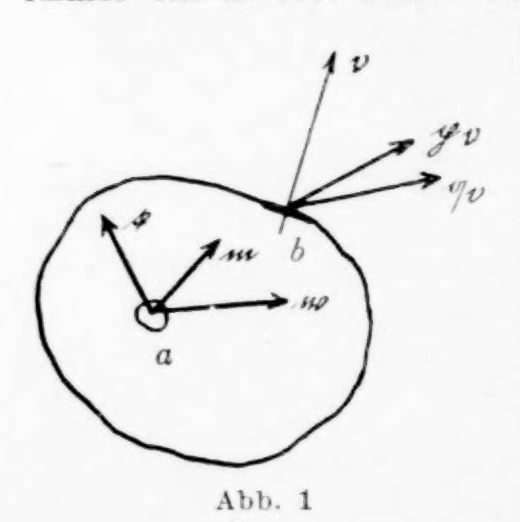


Abb. 1

Das Nebeneinanderbestehen von Volum- und Oberflächenkräften ist nur möglich, wenn die auf alle Teile einer geschlossenen Oberfläche wirkenden Oberflächenkräfte eine Summe ergeben, die von der gleichen Größenordnung wie die Summe der auf das Innere wirkenden Volumkräfte ist. Führt man diesen Gedanken für ein nach den Koordinatenrichtungen orientiertes Tetraeder aus (Abb. 2), so erhält man, wie bekannt, eine Beziehung, die $\mathfrak{p}_\nu$ aus $\mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z$ zu rechnen gestattet, und die sich in unserm Fall ganz gleichlautend auch für die $\mathfrak{q}$ ergibt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p}_\nu &= \mathfrak{p}_x \cos(\nu, x) + \mathfrak{p}_y \cos(\nu, y) + \mathfrak{p}_z \cos(\nu, z) \\ \mathfrak{q}_\nu &= \mathfrak{q}_x \cos(\nu, x) + \mathfrak{q}_y \cos(\nu, y) + \mathfrak{q}_z \cos(\nu, z) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (19).$$

Nach II (2) heißt dies, daß sowohl die $\mathfrak{p}$ als $\mathfrak{q}$ in jedem Punkt eine vektorielle Dyade bilden.

Betrachtet man jetzt ein parallelepipedisches Volumelement $dx\,dy\,dz$ (Abb. 3), so liefert einmal die erste Vektorkomponente von (18) die bekannte Differentialgleichung

$$\mu \mathfrak{w} = \mathfrak{k} + \frac{\partial \mathfrak{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{p}_z}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19\,a).$$

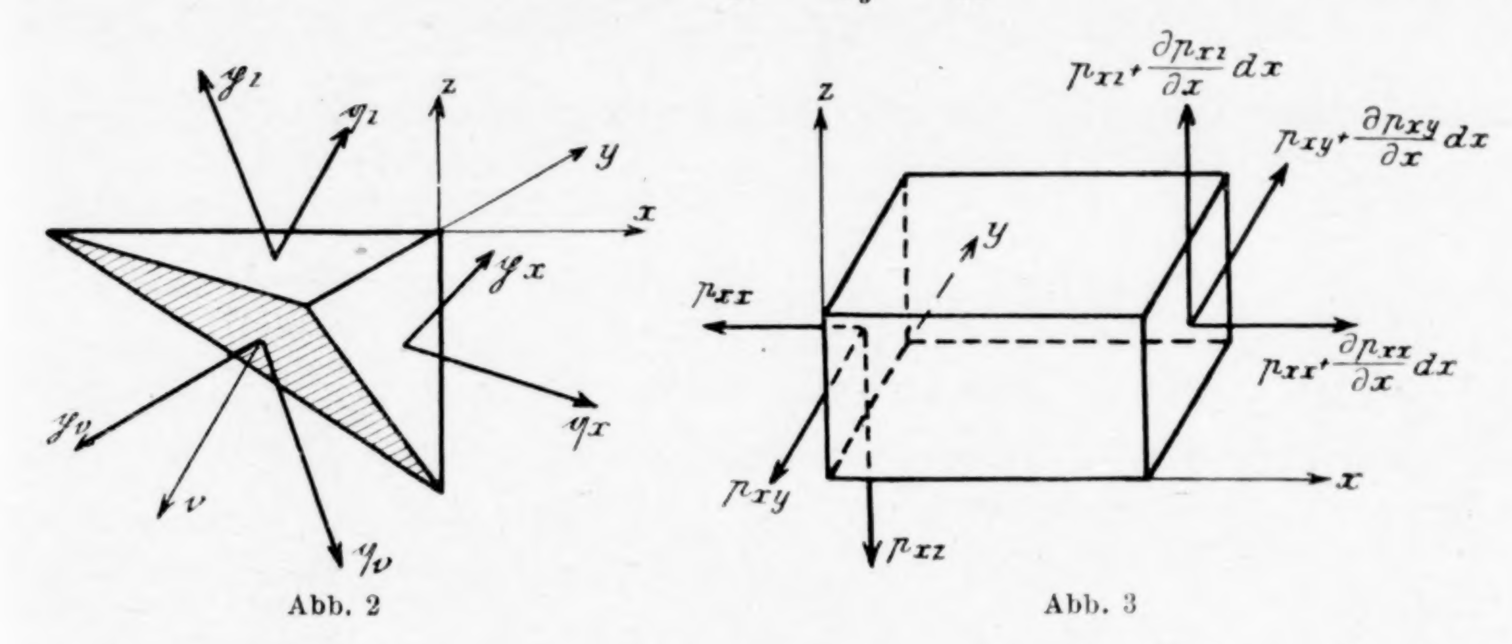


Abb. 2 Abb. 3

In der zweiten Komponentengleichung fällt die linke Seite fort, weil $\int (\mathfrak{r} \times \mathfrak{w})\, dm$ bei Verkleinerung des Volumens mit dessen linearer Abmessung gegen Null geht. Auf der rechten Seite bleiben neben den zu (19 a) analogen, durch $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{q}$ bestimmten Gliedern noch diejenigen übrig, die von den (bis auf Glieder höherer Ordnung) entgegengesetzt gleichen Tangentialkomponenten der $\mathfrak{p}$ an gegenüberliegenden Flächen herrühren, so daß man erhält:

$$0 = \mathfrak{m} + \frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial z} + (p_{yz} - p_{zy})\,\mathfrak{i}_1 + (p_{zx} - p_{xz})\,\mathfrak{i}_2 + (p_{xy} - p_{yx})\,\mathfrak{i}_3 \qquad (19\,b),$$

wo $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \mathfrak{i}_3$ die Einheitsvektoren in den Koordinatenrichtungen bezeichnen. Wenn man, wie üblich, die Momentgrößen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{q}$ von vornherein gleich Null setzt, so besagt (19 b), daß $p_{yz} = p_{zy}$, $p_{zx} = p_{xz}$, $p_{xy} = p_{yx}$, daß also die Spannungsdyade symmetrisch ist. Diese, sonst etwas unvermittelt auftretende Forderung ergibt sich somit ungezwungen aus dem im Sinne der Motorrechnung erweiterten Newtonschen Ansatz. Der Fall, daß $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{q}$ nicht beide verschwinden und daher die Spannungsdyade ihre Symmetrie verliert, ist gelegentlich im Hinblick auf die quasi-elastische Aethertheorie von A. Brill behandelt worden[1]).

4. Der elastische Stab. Eine besonders zweckmäßige Verwertung finden die Begriffsbildungen und Formeln der Motorrechnung bei der Behandlung der Gleichgewichtsprobleme allgemeiner elastischer Stabwerke (unter denen ideale Fachwerke und Rahmengebilde spezielle Fälle sind). Wir beginnen mit der Untersuchung des einzelnen elastischen Stabes, den wir, üblichen Annahmen gemäß, als ein sehr schlankes, gerades Prisma auffassen. Die Belastung bestehe aus Einzelkräften und Einzelmomenten und sei nicht größer, als der Elastizitätsgrenze des Materials entspricht. Auch setzen wir voraus, daß für die Beziehung zwischen Kräften und Formänderungen durchaus lineare Gesetze gelten und die Wirkungen der einzelnen Belastungskomponenten sich einfach übereinanderlagern; eine Rückbeeinflussung der Belastung durch die Formänderung (Knickwirkung) soll außer Betracht bleiben.

Ein Stück des Stabes von der Länge l, das frei von äußeren Kraftangriffen ist (Abb. 4), wird im Gleichgewicht erhalten durch die in den beiden Endquerschnitten 1 und 2 angreifenden Kräfte und Momente. Setzen wir die in 2 angreifenden Kräfte X, Y, Z und Momente M_x, M_y, M_z zu einem Motor $\mathfrak{S}$ — in der Folge kurz »Stabkraft« genannt — zusammen, so müssen die in 1 angreifenden den Motor $-\,\mathfrak{S}$ ergeben. Mit den Stabenden können wir uns je einen starren Körper oder, was auch genügt, je ein Achsenkreuz fest verbunden denken, dessen Lagenänderung, Drehung und Verschiebung, beim Uebergang vom unbelasteten in den belasteten Zustand, ebenfalls durch je einen

[1]) A. Brill, Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen, Leipzig und Berlin 1909.

Motor $\mathfrak{U}^1$ bezw. $\mathfrak{U}^2$ dargestellt wird. Denn man darf, wie dies bei den Gleichgewichtsproblemen der Elastizitätslehre stets geschieht, alle Verrückungen als unendlich klein betrachten und derartige Lagenänderungen sind ebenso wie Geschwindigkeiten starrer Körper durch Motoren darstellbar. Es bedeuten also die ersten drei skalaren Komponenten von $\mathfrak{U}^1$ die für das betreffende Achsenkreuz gebildeten Komponenten der Drehung des linken Stabendes, die anderen drei die Komponenten der Verschiebung, genommen für den Bezugspunkt, der mit dem Stabende fest verbunden gedacht wird. Unsere Aufgabe ist es zunächst, die Beziehungen zwischen der Stabkraft $\mathfrak{S}$ und der relativen Verschiebung der beiden Stabenden $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^2 - \mathfrak{U}^1$ auf Grund der bekannten Elastizitätsgleichungen zu ermitteln.

Abb. 4

Das Koordinatensystem legen wir folgendermaßen fest (Abb. 4). Zur z-Achse machen wir die Längsachse des Stabes, die die Querschnitts-Schwerpunkte verbindet, den Anfangspunkt legen wir in die Mitte dieser Achse, also in die Entfernung $l/2$ von beiden Enden. Die x- und y-Achse, die im Mittelquerschnitt verlaufen, sollen Biegungs-Hauptachsen des Querschnittes sein. Die positive Richtung der z-Achse laufe von 1 nach 2, der Richtungssinn der x- und y-Achse soll noch die Bedingung erfüllen, daß die drei Achsen ein Rechtssystem bilden. Die ersten drei skalaren Komponenten von $\mathfrak{S}$ sind jetzt gleich den drei Komponenten der in 2 angreifenden Endkraft: $S_1 = X$, $S_2 = Y$, $S_3 = Z$. Dagegen stimmen die weiteren drei Komponenten nicht restlos mit den Komponenten M_x, M_y, M_z des Spannungsmomentes in 2 überein, sondern es gilt $S_4 = M_x - Yl/2$, $S_5 = M_y - Xl/2$ und $S_6 = M_z$, weil diese Größen das Moment des durch X, Y, Z, M_x, M_y, M_z bestimmten Kräftesystems für den angenommenen Bezugspunkt in der Stabmitte bilden. Nun seien u, v, w die Komponenten der relativen Verschiebung, die der Endpunkt 2 der z-Achse gegenüber dem Endpunkt 1 infolge der Belastung durch $\mathfrak{S}$ erfährt (d. h. die Differenz der Verschiebung von 2 minus Verschiebung von 1) und ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z die analogen Komponenten der relativen Verdrehung eines mit dem Stabende 2 fest verbunden gedachten Achsenkreuzes gegenüber dem Stabende 1. Dann hat man analog für die sechs Komponenten des oben eingeführten Motors $\mathfrak{U}$ die Beziehungen: $U_1 = \vartheta_x$, $U_2 = \vartheta_y$, $U_3 = \vartheta_z$; $U_4 = u - \vartheta_y l/2$, $U_5 = v - \vartheta_x l/2$, $U_6 = w$. Wir suchen den Zusammenhang zwischen den $S_1 \ldots S_6$ einerseits und den $U_1 \ldots U_6$ andererseits.

Am einfachsten zu erledigen sind die z-Komponenten. Wenn E die Elastizitätszahl, F die Querschnittsfläche bezeichnet, so ist $w = Zl/EF$, und so in dieser Verrückung erschöpft sich die Wirkung der Längskomponente Z. Ganz analog wirkt das Moment M_z (Torsionsmoment) um die Längsachse lediglich auf eine Verdrehung ϑ_z hin, die direkt proportional dem Moment M_z und der Länge l, umgekehrt proportional dem Gleitmodul G und einer Querschnittsgröße J (für den Kreis $\pi d^4/32$) zu setzen ist. Man hat somit zunächst

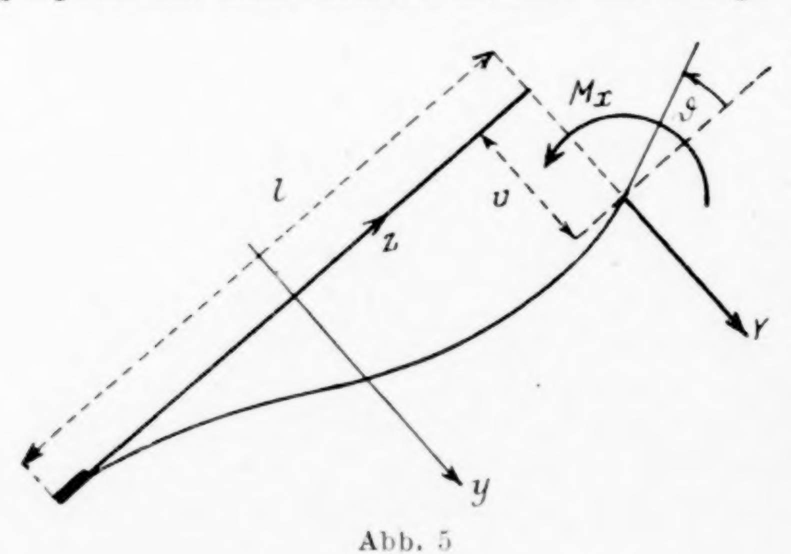


Abb. 5

$$U_6 = S_3 \frac{l}{EF}, \qquad U_3 = S_6 \frac{l}{GJ} \quad (20).$$

Nun betrachten wir gleichzeitig die Wirkung der Kraft Y und des Momentes M_x, die beide eine Biegung des Stabes um die x-Achse hervorrufen (Abb. 5). Das Biegungsmoment im Abstand z vom linken Ende ist $M_x - (l - z)\,Y$ und wenn J_x das Trägheitsmoment bezeichnet, lautet die Biegungsgleichung mit ihren Integralen unter den Bedingungen $y = y' = 0$ für $z = 0$:

$$E J_x y'' = -M_x + (l - z)\,Y, \quad E J_x y' = -z M_x + z\left(l - \frac{z}{2}\right) Y, \quad E J_x y = -\frac{z^2}{2} M_x + \frac{z^2}{2}\left(l - \frac{z}{3}\right) Y.$$

Setzt man rechts $z = l$ ein, so geht y in v und y' in $-\vartheta_x$ über, sodaß

$$\vartheta_x = \frac{l}{E J_x}\left(M_x - \frac{l}{2} Y\right), \qquad v = -\frac{l^2}{2\,E J_x} M_x + \frac{l^3}{3\,E J_x} Y, \qquad v + \frac{l}{2}\vartheta_x = \frac{l^3}{12\,E J_x} Y.$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem oben dargelegten Zusammenhang zwischen U_1 und ϑ_x, U_5 und v, S_2 und Y, S_4 und M_x, so sieht man, daß

$$U_1 = \frac{l}{E J_x} S_4, \qquad U_5 = \frac{l^3}{12\,E J_x} S_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

als weitere Beziehungen zwischen Kräften und Verschiebungen zu (20) hinzutreten. Genau in der gleichen Weise findet man schließlich durch Untersuchung der Biegung um die y-Achse:

$$U_2 = \frac{l}{E J_y} S_5, \qquad U_4 = \frac{l^3}{12\,E J_y} S_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22).$$

Die Gl. (20), (21), (22) liefern den vollständigen Zusammenhang zwischen dem Kraftmotor $\mathfrak{S}$ und dem Motor $\mathfrak{U}$ der relativen Verschiebung der Stabenden. Führen wir eine Motordyade K mit dem Komponentenschema

$$\begin{Bmatrix} \frac{l}{E J_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{E J_y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{G J} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l^3}{12\,E J_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l^3}{12\,E J_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{E F} \end{Bmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

ein, so können wir

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^2 - \mathfrak{U}^1 = \mathsf{K} \cdot \mathfrak{S} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

schreiben und aussprechen: Die relative Verschiebung der Enden eines elastischen Stabes ist das Produkt einer durch die Stabkonstanten bestimmten motorischen Dyade, deren Schema für das gewählte Bezugsystem durch (23) dargestellt wird, in den Motor der Stabkraft.

Man sieht, daß die »Dyade der Stabelastizität« ähnlich wie die Trägheitsdyade von dem im II, **10** behandelten vollsymmetrischen Typus ist. Das von uns gewählte Bezugsystem, das sich von vornherein als das einzige eindeutig ausgezeichnete empfahl, stellt sich als das Hauptachsenkreuz der Dyade heraus. Nach den in II, **6** und **7** gegebenen Regeln kann man nach Kenntnis der sechs in (23) auftretenden Größen das Komponentenschema auch für ein beliebiges Bezugsystem aufstellen und damit den Zusammenhang zwischen beliebigen Verschiebungs- und Belastungskomponenten zur Darstellung bringen.

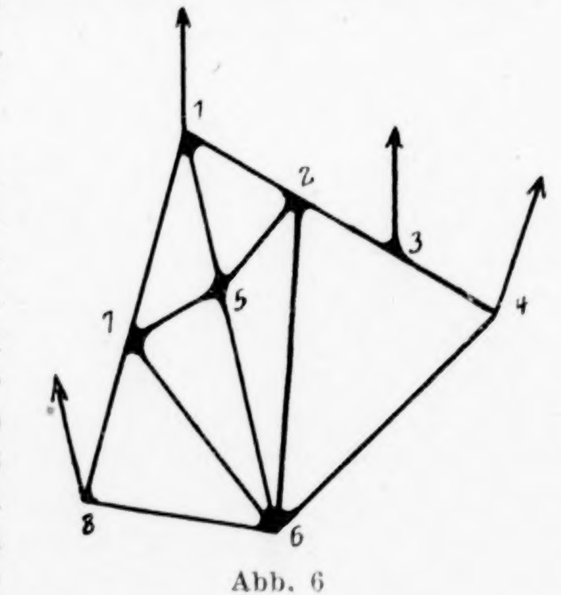


Abb. 6

5. Das elastische Stabwerk, Gleichgewichtsbedingungen. Wir betrachten jetzt ein allgemeines »Stabwerk« (Verallgemeinerung von »Fachwerk«), das folgendermaßen zusammengesetzt sei. Eine Anzahl gerader elastischer Stäbe der im Abschnitt **4** behandelten Art, die an beliebigen Punkten von Einzelkräften und -momenten beansprucht werden, sind an ihren Enden durch starre Körper, die wir »Knotenkörper« nennen und die ebenfalls dem Angriff äußerer Kräfte und Momente unterworfen sind, miteinander in irgendeiner Anordnung verbunden (Abb. 6). Der Einheitlichkeit halber wollen wir jedes kräfte-

freie Stück eines Stabes als einen besonderen Stab zählen und uns an dem Angriffspunkt der Kraft einen (in Wirklichkeit nicht vorhandenen) Knotenkörper hinzudenken, der die äußere Kraft aufnimmt und mit den beiden hier zusammenlaufenden Stabteilenden fest verbunden ist, d. h. die Verschiebung und Verdrehung dieser stetig aneinandergeschlossenen Enden mitmacht. Bei dieser Zählweise bestehe das Stabwerk aus s Stäben und k Knotenkörpern und es seien die äußeren Kräfte, die jetzt lediglich an Knoten angreifen, durch die k Motoren $\mathfrak{P}^1, \mathfrak{P}^2 \ldots \mathfrak{P}^k$ gegeben. Die Verrückungen, die die einzelnen Knotenkörper infolge der verschiedenen Kraftangriffe erfahren, bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}^1, \mathfrak{U}^2 \ldots \mathfrak{U}^k$. Die einzelnen Stäbe wollen wir nicht nummerieren, sondern durch die beiden Indices, die den Knoten an ihren Enden zukommen, kennzeichnen. (Stäbe, die an einem Ende weder in einen wirklichen Knoten einmünden, noch eine Last tragen, können aus der Betrachtung ausgeschlossen werden.) Die Stabkraft, die der zwischen den Knoten ι und $\varkappa$ verlaufende Stab vom Knoten ι her empfäng, sei $\mathfrak{S}^{\iota\varkappa}$ und demgemäß $\mathfrak{S}^{\iota\varkappa} = -\mathfrak{S}^{\varkappa\iota}$. Die Verrückung endlich, die das zum Knoten ι gehörende Ende dieses Stabes erfährt, heiße $\mathfrak{V}^{\iota\varkappa}$ und folgerichtig die Verrückung des zweiten Endes desselben Stabes $\mathfrak{V}^{\varkappa\iota}$. Zwischen $\mathfrak{S}^{\iota\varkappa}$ und der Differenz $\mathfrak{V}^{\iota\varkappa} - \mathfrak{V}^{\varkappa\iota}$ besteht eine Beziehung, wie sie in **4** beschrieben wurde:

$$\mathfrak{V}^{\iota\varkappa} - \mathfrak{V}^{\varkappa\iota} = \mathsf{K}^{\iota\varkappa} \cdot \mathfrak{S}^{\iota\varkappa} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25).$$

Hierbei bedeutet $\mathsf{K}^{\iota\varkappa}$ eine motorische Dyade der Form (23), wo für die Konstanten $l, E, J_x \ldots\ldots$ die dem Stab $\iota\varkappa$ entsprechenden Werte eingesetzt zu denken sind. Es ist natürlich $\mathsf{K}^{\iota\varkappa} = \mathsf{K}^{\varkappa\iota}$ und die Vertauschung der beiden Indices in (25) bringt nur nochmals zum Ausdruck, daß der Stabkraftmotor bei dieser Vertauschung sein Vorzeichen umkehrt.

Einer genaueren Erklärung bedarf es noch, in welcher Weise die Stabenden an die Knotenkörper angeschlossen sind. Wenn wir allgemein voraussetzen, die Verbindung sei eine starre, so wäre die Möglichkeit relativer Verschiebungen (oder Verdrehungen) der in einem Knoten zusammenlaufenden Stabenden (wie sie beim Fachwerk auftreten) ausgeschaltet. Um den allgemeinsten Fall zu umfassen, nehmen wir an, jedes Stabende sei elastisch mit dem Knotenkörper verbunden, d. h. es bestehe eine lineare Beziehung zwischen der Stabkraft $\mathfrak{S}^{\iota\varkappa}$ und der relativen Verrückung $\mathfrak{V}^{\iota\varkappa} - \mathfrak{U}^{\iota}$, wo $\mathfrak{U}^{\iota}$ den Verrückungs-Motor des ιten Knotenkörpers bezeichnet. Es mag beispielsweise so sein, daß für ein bestimmtes Koordinatenkreuz, dessen Anfangspunkt im Stabende liegt, die drei ersten (Drehungs-) Komponenten von $\mathfrak{V}^{\iota\varkappa} - \mathfrak{U}^{\iota}$ den drei Momentkomponenten von $\mathfrak{S}^{\iota\varkappa}$ proportional sind, die drei letzten den Resultantkomponenten. Wenn alle Proportionalitäts-Koeffizienten Null sind, haben wir den Fall starrer Verbindung; umgekehrt erhält man durch Vergrößerung einzelner Koeffizienten im Grenzübergang für die betreffende Komponente lose Verknüpfung. Das ideale Fachwerk ist gekennzeichnet durch die Annahme, daß die Verbindung hinsichtlich der Verschiebbarkeit starr, hinsichtlich der Drehbarkeit völlig lose ist. Allgemein müssen wir eine lineare Beziehung in der Form:

$$\mathfrak{V}^{\iota\varkappa} - \mathfrak{U}^{\iota} = \Lambda^{\iota\varkappa}\, \mathfrak{S}^{\iota\varkappa} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

ansetzen, worin $\Lambda^{\iota\varkappa}$ eine motorische Dyade bezeichnet. Der oben angedeuteten Annahme einfacher Proportionalität würde folgendes Schema für $\Lambda^{\iota\varkappa}$ entsprechen:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_3 \end{Bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27).$$

Wenn die α sämtlich Null sind, die β überaus große Werte erhalten, haben wir den Grenzfall des idealen Fachwerkknotens; sind alle α und β Null, so liegt der Fall des steifen Anschlusses, wie bei einem Rahmentragwerk, vor. Wir werden in der folgenden Untersuchung nur voraussetzen, daß das Schema von $\Lambda^{\iota\varkappa}$ ein symmetrisches ist, was in dem betrachteten Fall (27) gewiß zutrifft.

Es sei hier noch ausdrücklich bemerkt, daß als »Knotenkörper« teils die wirklich vorhandenen Knotenbleche oder sonstige Eckverbindungen anzusehen sind; daß aber auch dort, wo solche fehlen, der »Knotenkörper« durch ein bloß gedachtes, geometrisch definiertes Achsenkreuz ersetzt werden kann. Wenn wir mitten in einem elastischen Stab, bloß weil hier ein Kraftangriff stattfindet, einen »Knotenkörper« annehmen, so bedeutet dies nichts als ein Koordinatenkreuz, mit dem beide Stabteilenden fest verbunden sind.

Hat ein solcher Knoten den Index λ, während die beiden Stabteile andererseits nach den Knoten ι und $\varkappa$ reichen, so treten für (26) die beiden Gleichungen ein:

$$\mathfrak{V}^{\lambda\iota} - \mathfrak{U}^{\lambda} = 0, \qquad \mathfrak{V}^{\lambda\varkappa} - \mathfrak{U}^{\lambda} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (26').$$

Wir gehen jetzt dazu über, die Bedingungen des Gleichgewichtes für unser allgemeines elastische Stabwerk aufzustellen. Der Ansatz ist nicht umständlicher oder langwieriger als der für ein ideales Fachwerk bei gewöhnlicher Schreibweise.

Zunächst muß Gleichgewicht an jedem Knoten herrschen, d. h. die Summe der Stabkraft-Motoren, die von einem Knotenkörper ausgehen, muß gleich sein dem Motor der äußeren Kraft, die an diesem Knoten angreift:

$$\sum_{\varkappa} \mathfrak{S}^{\iota\varkappa} = \mathfrak{P}^{\iota} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (28).$$

Die Summation ist natürlich über jene $\varkappa$ zu erstrecken, deren Verbindung mit ι einem wirklich vorhandenen Stab des Stabwerkes entspricht. Denkt man sich die Gl. (28) für sämtliche Knoten angeschrieben und addiert, so kommt links jede Stabkraft zweimal vor, und zwar mit verschiedenen Vorzeichen, so daß man die Bedingung

$$\sum_{\iota=1}^{k} \mathfrak{P}^{\iota} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

erhält, die zeigt, daß die $\mathfrak{P}^{\iota}$ nicht etwa unabhängig voneinander alle vorgeschrieben werden können. Die Gl (28), die Gleichgewichtsbedingungen im engeren Sinne, reichen nur in sehr seltenen Fällen (sogen. statische Bestimmtheit) dazu aus, die Stabkräfte zu bestimmen. Man muß im allgemeinen die elastischen Beziehungen, die aus (25) und (26) folgen, hinzunehmen. Subtrahiert man von (26) die analog gebildete Gleichung für die umgekehrte Index-Kombination, so entsteht wegen $\mathfrak{S}^{\iota\varkappa} = -\mathfrak{S}^{\varkappa\iota}$:

$$\mathfrak{V}^{\iota\varkappa} - \mathfrak{V}^{\varkappa\iota} = \mathfrak{U}^{\iota} - \mathfrak{U}^{\varkappa} + (\Lambda^{\iota\varkappa} + \Lambda^{\varkappa\iota})\,\mathfrak{S}^{\iota\varkappa}$$

und wenn man dies mit (25) verbindet:

$$\mathfrak{U}^{\iota} - \mathfrak{U}^{\varkappa} = (\mathsf{K}^{\iota\varkappa} - \Lambda^{\iota\varkappa} - \Lambda^{\varkappa\iota})\,\mathfrak{S}^{\iota\varkappa} = \mathsf{M}^{\iota\varkappa}\,\mathfrak{S}^{\iota\varkappa} \quad \ldots \ldots \quad (30).$$

Hier ist $\mathsf{M}^{\iota\varkappa}$ zur Abkürzung für die in der Klammer stehende Summe dreier Motordyaden gesetzt.

Solcher Gleichungen (30) gibt es im ganzen s, für jeden Stab eine, wie es von den Gleichgewichtsbedingungen (28) k gibt, nämlich für jeden Knotenkörper eine. Beide Gleichungsgruppen zusammen lösen das Problem, wenn etwa alle $\mathfrak{P}^{\iota}$ bis auf $\mathfrak{P}^{1}$ und außerdem $\mathfrak{U}^{1}$ (z. B. $\mathfrak{U}^{1} = 0$) gegeben sind: die $k + s$ Motor-Gleichungen reichen dann gerade zur Bestimmung der s unbekannten Stabkraft-Motoren $\mathfrak{S}^{\iota\varkappa}$, der $k - 1$ unbekannten Verrückungs-Motoren $\mathfrak{U}^{2}$, $\mathfrak{U}^{3}$ . . . $\mathfrak{U}^{k}$ und der Auflager-Reaktion $\mathfrak{P}^{1}$ aus. Um aber den Fall beliebiger Auflagerbedingungen, auch elastisch-nachgiebiger Stützung, mitzunehmen, fügen wir den Gl. (28) und (30) noch die folgende, für jeden Knotenpunkt anzusetzende, hinzu:

$$\mathsf{A}^{\iota}\,\mathfrak{U}^{\iota} + \mathsf{B}^{\iota}\,\mathfrak{P}^{\iota} = \mathfrak{C}^{\iota} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (31),$$

worin A^{ι}, B^{ι} und $\mathfrak{C}^{\iota}$ gegebene Koeffizienten-Systeme (je zwei Dyaden und einen Motor) bezeichnen sollen. Für jene Knoten, in denen die äußere Last $\mathfrak{P}$ gegeben ist, verschwindet A, und B kann etwa die Einheitsdyade sein, so daß die Gl. (31) einfach $\mathfrak{P}^{\iota} = \mathfrak{C}^{\iota}$ lautet; ist nicht $\mathfrak{P}$, sondern $\mathfrak{U}$ vorgeschrieben, so bedeutet das, daß B verschwindet und für A die Einheitsdyade zu setzen ist; hat man endlich eine elastisch-nachgiebige Stütze, so ist $\mathfrak{C} = 0$ und aus (31) wird eine linear-homogene Beziehung zwischen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{P}$. Natürlich sind auch Fälle, in denen einzelne Komponenten von $\mathfrak{U}^{\iota}$ und einzelne Komponenten von $\mathfrak{P}^{\iota}$ gegeben- bezw. unbekannt sind, in (31) mitenthalten.

Zusammenfassend können wir also sagen, daß die $(2k + s)$ Motoren der Stabkräfte $\mathfrak{S}^{\iota\varkappa}$, der Verrückungen $\mathfrak{U}^{\iota}$ und der äußeren Lasten $\mathfrak{P}^{\iota}$ durch folgende $(2k + s)$ lineare Motorgleichungen verknüpft sind:

k Gleichgewichtsbedingungen $\sum_{\varkappa} \mathfrak{S}^{\iota\varkappa} = \mathfrak{P}^{\iota}$, für jeden Knoten . . . (a);

s Elastizitätsgleichungen $\mathfrak{U}^{\iota} - \mathfrak{U}^{\varkappa} = \mathsf{M}^{\iota\varkappa}\,\mathfrak{S}^{\iota\varkappa}$, für jeden Stab . . (b);

k äußere Daten $\mathsf{A}^{\iota}\,\mathfrak{U}^{\iota} + \mathsf{B}^{\iota}\,\mathfrak{P}^{\iota} = \mathfrak{C}^{\iota}$, für jeden Knoten . . . (c).

Dieser Ansatz umfaßt jedes denkbare Stabwerk, das aus geraden Stäben gebildet wird, den durchlaufenden Balken mit beliebiger Stützung und beliebigen Einzellasten, das ideale Fachwerk im Raum und in der Ebene bei beliebiger statischer Unbestimmtheit,

Fachwerke mit steifen oder elastisch nachgiebigen Eckverbindungen, Rahmentragwerke irgend welcher Art, auch bei beliebiger räumlicher Stützung unter Berücksichtigung der Torsion der Stäbe usw.

6. Formänderungsarbeit, Gegenseitigkeit der Verrückungen. Aus dem Ansatz (*a*), (*b*), (*c*) kann man mit Leichtigkeit eine Reihe allgemeiner Aussagen ableiten, durch die bekannte Sätze der Fachwerktheorie erst ihre richtige Stellung und Beleuchtung erhalten. Zunächst läßt sich Gl. (a) für sich in der Form des »Prinzips der virtuellen Verrückungen« schreiben. Bezeichnet nämlich $\mathfrak{V}^1, \mathfrak{V}^2 \ldots \mathfrak{V}^k$ irgendwelche Motoren, die wir als willkürliche Verrückungen der Knotenkörper auffassen wollen, so liefert skalare Multiplikation der k Gleichungen (a) mit dem betreffenden $\mathfrak{V}^\iota$ und darauf folgende Addition auf der rechten Seite die bei dieser Verrückung des Stabwerkes von den äußeren Kräften geleistete Arbeit, nämlich die Summe aller Produkte $\mathfrak{P}^\iota \mathfrak{V}^\iota$. Links steht eine Doppelsumme der Produkte $\mathfrak{S}^{\iota\varkappa}\mathfrak{V}^\iota$, die über alle durch Stäbe realisierte Zahlenkombinationen $\iota, \varkappa$ zu erstrecken ist. Dabei tritt jede Stabkraft zweimal auf, und zwar mit verschiedenen Vorzeichen, einmal mit dem $\mathfrak{V}$ des ersten und dann mit dem $\mathfrak{V}$ des zweiten Endpunktes multipliziert. Demnach kann man für (a) schreiben

$$\sum_{(\iota,\varkappa)} \mathfrak{S}^{\iota\varkappa}(\mathfrak{V}^\iota - \mathfrak{V}^\varkappa) = \sum_\iota \mathfrak{P}^\iota \mathfrak{V}^\iota \quad \ldots \ldots \ldots \quad (32),$$

wenn die in Klammern gesetzten Summationsbuchstaben darauf hindeuten, daß jede Wertverbindung $\iota, \varkappa$ nur einmal (also z. B. nur mit $\iota < \varkappa$) zu nehmen ist. Gl. (32) besagt: Bei jeder unendlich kleinen Verrückung des Stabwerkes ist die Arbeit der eingeprägten Kräfte gleich der elastischen Arbeit (Formänderungsarbeit) der Stabkräfte. — Daß die $\mathfrak{V}$ auch mit den wirklichen Verschiebungen zusammenfallen dürfen, ist selbstverständlich; die Kleinheit der $\mathfrak{V}$ muß nur deshalb vorausgesetzt werden, weil sonst die linke Seite von (32) nicht als (doppelte) Formänderungsarbeit angesprochen werden kann.

Ein ganz einfacher Schritt führt uns jetzt zu der allgemeinsten Form des Maxwellschen Satzes über die »Gegenseitigkeit der Verrückungen«. Man bezeichne mit $\mathfrak{V}^\iota$ diejenigen Knoten-Verrückungen, die einem Gleichgewichtszustand mit den äußeren Lasten $\mathfrak{Q}^\iota$ und den Stabkräften $\mathfrak{T}^{\iota\varkappa}$ entsprechen. Der Zusammenhang dieser Größen untereinander wird dann durch die Gl. (a) und (b) beherrscht, von denen wir die erste gleich in der (32) analogen Umformung anschreiben, unter Verwendung des Buchstabens $\mathfrak{U}$ für die willkürlichen Verrückungen:

$$\sum_{(\iota,\varkappa)} \mathfrak{T}^{\iota\varkappa}(\mathfrak{U}^\iota - \mathfrak{U}^\varkappa) = \sum_\iota \mathfrak{Q}^\iota \mathfrak{U}^\iota, \qquad \mathfrak{V}^\iota - \mathfrak{V}^\varkappa = M^{\iota\varkappa}\mathfrak{T}^{\iota\varkappa} \quad \ldots \quad (33).$$

Setzt man die zweite dieser Gleichungen in (32) ein, so erhält man

$$\sum_{(\iota,\varkappa)} \mathfrak{S}^{\iota\varkappa}(M^{\iota\varkappa}\mathfrak{T}^{\iota\varkappa}) = \sum_\iota \mathfrak{P}^\iota \mathfrak{V}^\iota$$

und wenn man den Wert aus (b) in die erste Gl. (33) einführt:

$$\sum_{(\iota,\varkappa)} \mathfrak{T}^{\iota\varkappa}(M^{\iota\varkappa}\mathfrak{S}^{\iota\varkappa}) = \sum_\iota \mathfrak{Q}^\iota \mathfrak{U}^\iota.$$

Nach dem Satz II (49) sind die Ausdrücke auf den linken Seiten gleich, wenn die Dyaden M symmetrisch vorausgesetzt werden. In diesem Falle gilt also:

$$\sum_\iota \mathfrak{P}^\iota \mathfrak{V}^\iota = \sum_\iota \mathfrak{Q}^\iota \mathfrak{U}^\iota \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34),$$

in Worten: Sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ zwei Gleichgewichtssysteme von äußeren Lasten, $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ die durch sie hervorgerufenen Verrückungen der Knoten, so ist die Arbeit der $\mathfrak{P}$ bei den Verrückungen $\mathfrak{V}$ gleich der Arbeit der $\mathfrak{Q}$ bei den Verrückungen $\mathfrak{U}$. Dies ist der verallgemeinerte Maxwellsche Satz, den man in bekannter Weise, durch spezielle Wahl der $\mathfrak{Q}$, zur Berechnung der Verschiebungen $\mathfrak{U}$ benutzen kann. Seine wahre Quelle liegt, wie man sieht, in der Symmetrie der Dyaden M, die die Stabkräfte mit den relativen Verrückungen der Knoten verknüpft. Es ist bemerkenswert, daß zur Herleitung von (34) die Gl. (c) nicht benutzt wurde, daß also die Auflagerbedingungen keinen Einfluß auf die Gültigkeit von (34) haben; in den $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ sind natürlich die Auflagerreaktionen mit eingeschlossen, die nur dann herausfallen, wenn sie keine Arbeit leisten.

Wir wollen endlich, um zu dem Analogon der Castiglianoschen Sätze zu gelangen, die Auflagerbedingungen, die in (c) zum Ausdruck kommen, etwas spezialisieren. Wir nehmen an, die $6k$ skalaren Gleichungen, in die sich (c) auflöst, mögen so beschaffen

sein, daß in einem Teil von ihnen die Koeffizienten der Verschiebungen verschwinden, während in den übrigen die Koeffizienten der Kraftkomponenten und die rechten Seiten Null sind, so etwa, daß die ersteren Gleichungen $6k\text{-}m$ Kraftkomponenten bestimmen, die letzteren aber für die übrigen m Komponenten die Verrückung gleich Null festlegen. Mit anderen Worten, im ι-ten Knoten seien entweder alle sechs Kraftkomponenten gegeben, odar einzelne von ihnen unbekannt, aber dafür die betreffende Verrückungskomponenten gleich Null. Wir bilden dann das »reduzierte System der Gleichungen (a)«, indem wir von den $6k$ Komponentengleichungen diejenigen m fortlassen, die den unbekannten Kräften und verschwindenden Verrückungen entsprechen. Einen Ausdruck für die Formänderungsarbeit erhalten wir aus (32) durch Einsetzen von (b):

$$A = {}^1/_2 \sum_{\iota} \mathfrak{P}^\iota \mathfrak{V}^\iota = {}^1/_2 \sum_{(\iota,\varkappa)} \mathfrak{S}^{\iota\varkappa} \mathbf{M}^{\iota\varkappa} \mathfrak{S}^{\iota\varkappa} \quad \ldots\ldots \quad (35).$$

Nach dem in II **10** Ausgeführten ist die rechte Seite eine quadratische Form in den $6s$ Komponenten der Stabkraft-Motoren. Wir beweisen nun den Satz: Die von den äußeren Lasten $\mathfrak{P}$ hervorgerufenen Stabkräfte $\mathfrak{S}$ sind dadurch bestimmt, daß sie mit dem reduzierten System der Gl. (a) als Nebenbedingungen die Formänderungsarbeit A zu einem Minimum machen. Um dies einzusehen, müssen wir uns nur davon überzeugen, daß die Gl. (b) als die Bedingungen für ein Extremum von A in dem angegebenen Sinne aufgefaßt werden können.

Wie hätte man denn die angedeutete Extremumaufgabe zu lösen? Man müßte zu dem Ausdruck A die in dem reduzierten System (a) auftretenden $6k\text{-}m$ Komponenten von $(\sum_{\varkappa} \mathfrak{S}^{\iota\varkappa} - \mathfrak{P}^\iota)$ mit unbestimmten Faktoren $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{6k-m}$ multipliziert hinzufügen und dann die Ableitungen nach jeder der $6s$ Komponenten der $\mathfrak{S}^{\iota\varkappa}$ gleich Null setzen. Die so gebildeten $6s$ Gleichungen mit dem reduzierten System (a) zusammen bestimmen dann die S und die λ. Für die Multiplikatoren λ wählt man nun besser eine Bezeichnung mit Doppelindex, etwa $\lambda_1^\iota, \lambda_2^\iota \ldots \lambda_6^\iota$, wobei jedesmal der obere und untere Index mit dem entsprechenden der Komponente von $\mathfrak{P}^\iota$ übereinstimmen mag. Man sieht nun sofort, daß die Differentiation der Zusatzglieder beispielsweise nach der Komponente $S_3^{1,2}$ gerade den Ausdruck $\lambda_3^1 - \lambda_3^2$ liefert; denn $S_3^{1,2}$ tritt einmal positiv in der dritten Komponentengleichung von $\sum \mathfrak{S}^{1,\varkappa} = \mathfrak{P}^1$ und einmal negativ in der dritten Komponentengleichung von $\sum \mathfrak{S}^{2,\varkappa} = \mathfrak{P}^2$ auf. Die Ableitung von A in (35) nach $S_3^{1,2}$ ist aber zufolge der Bemerkung in II, **10** gleich der dritten Komponente des Produktes $\mathbf{M}^{1,2} \cdot \mathfrak{S}^{1,2}$. Demgemäß führt das Nullsetzen der Ableitung nach $S_3^{1,2}$ zu der Gleichung

$$\lambda_3^1 - \lambda_3^2 + (\mathbf{M}^{1,2} \cdot \mathfrak{S}^{1,2})_3 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

und ganz entsprechende Gleichungen entstehen durch Differentiation nach den übrigen Komponenten. Man sieht aber, daß diese $6s$ Gleichungen nichts anderes sind als die Komponentenzerlegung der (b), wenn darin jedes U_ρ^ι durch $-\lambda_\rho^\iota$ ersetzt wird. Eliminiert man daher aus den $6s$ Gl. (36) und dem reduzierten System (a) die $6k\text{-}m$ Multiplikatoren λ, so bleiben zur Bestimmung der $6s$ Komponenten S genau dieselben Gleichungen, die durch Elimination der Verrückungen aus (a), (b), (c) hervorgehen. Damit ist der Beweis für den allgemeinen Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit erbracht.

Es soll hier nicht weiter ausgeführt werden, wie sich die Analoga zu den anderen Formen des Castiglianoschen Satzes und weitere hierhergehörige Verallgemeinerungen gewinnen lassen.

7. Aktion und Reaktion strömender Flüssigkeit.

Wir betrachten einen starren Körper (A in Abb. 7), dessen augenblicklicher Geschwindigkeitszustand durch den Motor $\mathfrak{G}$ gegeben sei und der in irgendeiner Weise mit strömender, d. h. bewegter Flüssigkeit in Berührung steht. Ueber die mechanische Natur der Flüssigkeit, ihre Zähigkeit usf. wird nichts vorausgesetzt. Wir suchen einen Ausdruck für die Kraft $\mathfrak{K}$, die die Flüssigkeit auf den starren Körper oder ein bestimmtes vorgegebenes Stück O seiner Oberfläche ausübt. Dazu führt uns die Anwendung der Newtonsche Gleichung auf die Flüssigkeit — unter Beachtung des Gegenwirkungsprinzips für innere Spannungen — und eine verallgemeinerte Gaußsche Integralumformung.

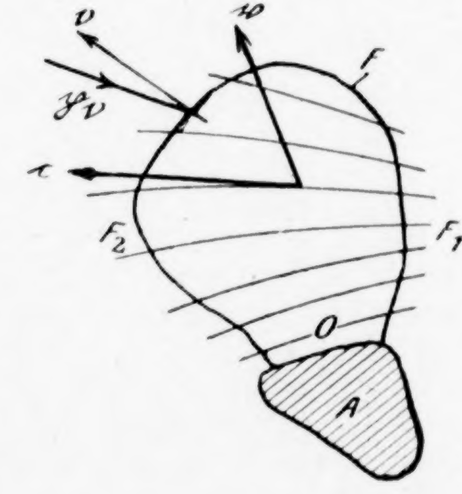


Abb. 7

Das Oberflächenstück O wird im allgemeinen für sich allein noch keinen geschlossenen Raumteil abgrenzen. Wir ergänzen es dann durch eine Fläche F, die ganz in der Flüssigkeit verläuft, und setzen voraus, daß F mit O zusammen ein voll von Flüssigkeit mit stetiger Geschwindigkeitsverteilung erfülltes Volumen V begrenzt, in dessen Inneren sich also auch kein fester Körper und keine freie Oberfläche mehr befindet. Alle im folgenden auftretenden Raumintegrale sind auf dieses Volumen V, alle Oberflächenintegrale auf F zu erstrecken. Es bezeichne nun μ die — konstant angenommene — spezifische Masse der Flüssigkeit und $\mathfrak{P}$ die gesamte, auf alle Teilchen von V wirkende äußere Kraft (Schwere). Ferner sei $\mathfrak{v}$ der Geschwindigkeitsvektor in einem beliebigen Punkt von V und $\mathfrak{p}$ der Spannungsvektor in einem Punkt der Oberfläche F. Indem wir $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{p}$ an die Punkte, denen sie zugehören, »anheften«, machen wir aus den Vektoren Stäbe, also spezielle Motoren, und schreiben dann $\boldsymbol{\mathfrak{v}}$ bezw. $\boldsymbol{\mathfrak{p}}$ dafür. Der Motor $\boldsymbol{\mathfrak{v}}$ hat somit die beiden Vektorkomponenten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}$, wenn $\mathfrak{r}$ den Vektor vom Bezugspunkt nach dem Punkt mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bezeichnet. Die Newtonsche Gleichung, angewendet auf alle Massenteilchen von V und integriert über V, liefert sofort:

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{P} + \int \boldsymbol{\mathfrak{p}}\, dF - \int \mu \frac{d\boldsymbol{\mathfrak{v}}}{dt}\, dV \quad \ldots \ldots \quad (37).$$

Denn $-\mathfrak{K}$, $\mathfrak{P}$ und $\int \boldsymbol{\mathfrak{p}}\, dF$ sind die Kräfte, denen die Beschleunigungen der Flüssigkeitsteilchen zuzuschreiben sind. Es handelt sich jetzt nur um eine Umformung des letzten Ausdruckes rechts, wobei es hauptsächlich auf eine Untersuchung des Differentiationsprozesses ankommt.

Jeder Flüssigkeitspunkt p besitzt relativ gegenüber dem starren Körper eine Geschwindigkeit $\mathfrak{c}$, die sich von $\mathfrak{v}$ um den Vektor der Führungsgeschwindigkeit $\mathfrak{G}_p$ unterscheidet. Die Vektorlinien von $\mathfrak{c}$ bilden die »relativen Stromlinien«, von denen es sicher ist, daß sie den Körper A und die Fläche O nicht durchsetzen. Nennt man ds das Längenelement einer solchen Stromlinie, df den Querschnitt eines aus ihnen gebildeten Stromfadens, so ist zufolge der Kontinuitätsbedingung $c\,df$ längs des Fadens konstant gleich der Durchflußmenge dQ. Da nun, wenn man eine Variable als Funktion der Zeit und des Ortes relativ zum Körper A auffaßt, die Differentiationsregel

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial s}$$

gilt, andererseits $dV = df \cdot ds$ geschrieben werden kann, so erhält man für das Integral in (37)

$$\int \mu \frac{d\boldsymbol{\mathfrak{v}}}{dt}\, dV = \int \mu \frac{\partial \boldsymbol{\mathfrak{v}}}{\partial t}\, dV + \int \mu\, c\, df \frac{\partial \boldsymbol{\mathfrak{v}}}{\partial s}\, ds = \int \mu \frac{\partial \boldsymbol{\mathfrak{v}}}{\partial t}\, dV + \mu \int_{(F)} \boldsymbol{\mathfrak{v}}\, dQ \quad . \quad . \quad (37').$$

Das letzte Integral ist über die ganze Fläche F zu erstrecken und dabei dQ positiv zu nehmen, wo die Flüssigkeitsmenge austritt, negativ, wo sie eintritt. Man kann dementsprechend F in zwei Teile F_1 und F_2 zerlegt denken, sodaß jede relative Stromlinie in einem Punkte von F_1 beginnt und einem von F_2 endet, und, indem man festsetzt, daß dQ immer mit seinem absoluten Betrag zu nehmen ist, für den betrachteten Ausdruck $\mathfrak{R} - \mathfrak{A}$ setzen, wo

$$\mathfrak{R} = \mu \int_{(F_2)} \boldsymbol{\mathfrak{v}}\, dQ, \qquad \mathfrak{A} = \mu \int_{(F_1)} \boldsymbol{\mathfrak{v}}\, dQ \quad \ldots \ldots \quad (38).$$

Diese beiden Größen sind es, die man in der Regel als »Reaktion« und »Aktion« des strömenden Wassers bezeichnet; es sind Motoren, deren Resultant- bezw. Momentkomponenten man erhält, wenn man unter dem Integralzeichen anstelle von $\boldsymbol{\mathfrak{v}}$ einmal $\mathfrak{v}$ und einmal $\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}$ setzt. Ausdrücklich sei hervorgehoben, daß $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{A}$ mit den absoluten Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ zu bilden sind, daß aber dabei die relativen Durchflußmengen $dQ = c\,df$ genommen werden müssen.

Der Wert (37) für $\mathfrak{K}$ reduziert sich nun auf

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{P} + \int \boldsymbol{\mathfrak{p}}\, dF + \mathfrak{A} - \mathfrak{R} \quad \ldots \ldots \quad (39),$$

oder die dynamische Wirkung der Strömung wird durch die Differenz »Aktion minus Reaktion« gegeben, wenn das erste Integral rechts in (37′) verschwindet, also sicher dann, wenn für jeden, auf A bezogen festen Punkt die absolute Geschwindigkeit $\boldsymbol{\mathfrak{v}}$, vom ruhenden Raum aus beurteilt unveränderlich ist.

Dies trifft beispielsweise bei einer Rakete zu (Abb. 8), solange dafür gesorgt ist, daß die absolute Austrittsgeschwindigkeit des Gases konstant bleibt; als Abschlußfläche F dient hier am einfachsten die ebene Ueberdeckung der Austrittsöffnung, und es fällt F mit F_2 zusammen.

Wenn die Rakete sich nicht beschleunigungsfrei bewegt, so wird in der Regel nicht die Voraussetzung konstanter absoluter Austrittsgeschwindigkeit erfüllt sein, sondern eher die, daß die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{c}$ in einem gegen A festen Punkt sich nicht ändert. Für solche Fälle muß man (37) auf eine andere Form bringen. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{f}$ die an ihren Ort »angeheftete« Führungsgeschwindigkeit, also den Motor mit den Vektorkomponenten $\mathfrak{G}_p$ und $\mathfrak{r} \times \mathfrak{G}_p$, so zerfällt das erste Integral recht in (37') in die beiden

$$\int \mu \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} d V + \int \mu \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial t} d V .$$

Abb. 8

Das erste gibt die Ableitung nach der Zeit für den Impuls, den die Flüssigkeit besäße, wenn sie sich mit dem starren Körper mitbewegen würde. Nennen wir diesen $\mathfrak{J}$, so haben wir anstelle von (39):

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{P} + \int \mathfrak{p} \, d F + \frac{d \mathfrak{J}}{d t} + \mathfrak{A} - \mathfrak{N} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40)$$

wenn die relative, nicht die absolute, Geschwindigkeit im bewegten Körper stationär ist.

Sowohl für (39) wie für (40) gilt, wie schon erwähnt, daß die geforderte Unveränderlichkeit von $\mathfrak{v}$ bezw. von $\mathfrak{c}$ vom ruhenden Raum aus zu beurteilen ist. Wenn der Körper A keine reine Translationsbewegung vollführt, und, sei es $\mathfrak{v}$ oder $\mathfrak{c}$, relativ gegen A stationär bleibt, so ist die Voraussetzung von (39) bezw. (40) nicht erfüllt. Es gelten also für eine Turbine oder einen Propeller die Gl. (39) und (40) im allgemeinen nicht, sondern nur diejenigen ihrer skalaren Komponentengleichungen, für die die betreffenden Komponenten von $\mathfrak{v}$ oder $\mathfrak{c}$, auch vom ruhenden Raum aus gesehen, stationär sind. Setzt man nach (4)

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = \frac{\partial' \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{G} \times \mathfrak{v}),$$

so sieht man, daß wenn nur der erste Teil rechts verschwindet, in (39) noch ein Ausdruck

$$- \mathfrak{G} \times \mu \int \mathfrak{v} \, d V$$

auftreten muß, von dem sich nur die Resultantkomponente in ein Oberflächenintegral verwandeln läßt. Da aber für ein Motorprodukt, dessen einer Faktor $\mathfrak{G}$ ist, der Resultantvektor und der Momentvektor für einen Punkt der Achse von $\mathfrak{G}$ als Bezugspunkt senkrecht auf dieser Achse stehen, so folgt: Von den Gl. (39) bezw. (40) dürfen bei relativ stationärem $\mathfrak{v}$ bezw. $\mathfrak{c}$ die erste skalare Resultant- und erste Momentkomponente verwendet werden, wenn die 1-Achse mit der momentanen Schraubachse von A zusammenfällt. In der Tat werden bei Turbinen und Propellern nur der axiale Schub und das Moment um die Drehachse nach den Sätzen von Aktion und Reaktion gerechnet. Es ist nicht unnütz, zu beachten, daß beispielsweise bei einem Propeller, dessen Vorschub nicht in die Achsrichtung fällt, die Gl. (39) bezw. (40) auch in dieser Hinsicht zu korrigieren sind.

Der Einfluß innerer Zähigkeit oder äußerer Bewegungswiderstände ist in unserem Ansatz nicht explizite erkennbar. Es macht sich aber darin geltend, daß, etwa bei gegebenen Eintrittsgeschwindigkeiten, die Endgeschwindigkeiten andere werden und überdies darin, daß die $\mathfrak{p}$ im allgemeinen nicht senkrecht auf den dF stehen werden.

Die theoretische Hydromechanik pflegt die vorstehenden Formeln und die Begriffe von »Aktion und Reaktion« nicht zu beachten, in der technischen Literatur ist die Ableitung meist voller Unklarheiten und nicht selten prinzipiell fehlerhaft. Aber auch wenn das mechanisch Grundsätzliche völlig geklärt ist, bringt noch die gesonderte Herleitung namentlich der Momentkomponenten von (39) und (40) einige Umständlichkeiten mit sich, die durch Verwendung des dem Problem angemessenen Motorbegriffes vermieden werden [1]).

[1]) Eine vollständige, noch etwas allgemeinere Begründung der Sätze über Aktion und Reaktion habe ich gegeben in § 9 meiner Habilitationsschrift: Theorie der Wasserräder, Leipzig 1908, auch Zeitschr. f. Math. u. Phys. 57, 1908, S. 1 bis 120. Den speziellen Fall ruhender Führungsfläche O behandelte kürzlich U. Cisotti, Rendic Lombard. Ist., ser. II, Bd. 50, S. 502 bis 515.

8. Trägheitsvermehrung eines starren Körpers in einer idealen Flüssigkeit. Wir wollen jetzt den Ansatz (37) des vorangehenden Abschnittes für den Fall spezialisieren, daß die Flüssigkeit eine ideale ist und die Bewegung wirbelfrei und ohne Zirkulation erfolgt. Ueberdies soll die Abschlußfläche F als Niveaufläche des Potentials φ vorausgesetzt werden, sodaß ohne weitere Beschränkung der Allgemeinheit $\varphi = 0$ längs F angenommen werden darf (Abb. 7 und 9). Durch diese Bedingung und die weitere, daß längs O die Normalableitung $\partial\varphi/\partial n$ mit der Normalkomponente der Geschwindigkeit $\mathfrak{G}_p$ von A übereinstimmen muß, ist das Potential φ in allen Punkten von V bestimmt. Bezeichnen wir den an seinen Punkt p von O »angehefteten« Einheitsvektor in der Normalenrichtung als Motor mit $\mathfrak{N}$, so hat diese Geschwindigkeitskomponente den Wert des skalaren Produktes $\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{N}$; denn es gilt nach I, **3**, da die auf p bezogene Momentkomponente von $\mathfrak{N}$ verschwindet, $\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{N} = \mathfrak{G}_p \cdot \mathfrak{N}$.

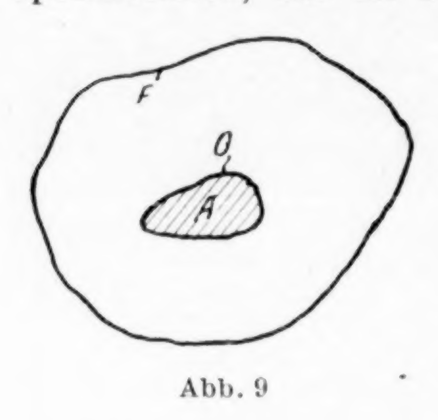


Abb. 9

Nun machen wir für das Potential φ den Ansatz

$$\varphi = \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{G} = G_1 U_4 + G_2 U_5 + G_3 U_6 + G_4 U_1 + G_5 U_2 + G_6 U_3 \quad . \quad . \quad (41)$$

und unterwerfen die sechs skalaren Funktionen U folgenden Bedingungen: 1. sollen die U einzeln der Potentialgleichung $\Delta U = o$ genügen; 2. soll jedes U längs F verschwinden; 3. soll längs O die Ableitungsbedingung erfüllt sein:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n} \cdot \mathfrak{G} = \mathfrak{N} \cdot \mathfrak{G},$$

was sicher der Fall ist, wenn die Normalableitungen der sechs U der Reihe nach mit den sechs skalaren Komponenten von $\mathfrak{N}$ übereinstimmen. Wir haben damit ein neuartiges »Motor-Potential« $\mathfrak{U}$ eingeführt, das im vorliegenden Fall bestimmt wird durch die Gleichungen

$$\Delta \mathfrak{U} = 0 \text{ in } V; \qquad \mathfrak{U} = 0 \text{ längs } F; \qquad \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n} = \mathfrak{N} \text{ längs } O \quad . \quad . \quad (42).$$

Natürlich ist $\mathfrak{U}$ noch von der Zeit t abhängig, insofern die Lage von O und eventuell die von F sich mit t verändert.

Mit Hilfe des Motor-Potentials kann man jetzt in einfacher Weise dem Integral in (37) eine bestimmte charakteristische Form geben. Bekanntlich ist der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ in jedem Punkt von V gleich dem grad φ. Bezeichnen wir den an seinen Ort »angehefteten« Gradienten als Motor mit **Grad** φ, so haben wir $\mathfrak{v} =$ **Grad** φ. Es gilt nun die erweiterte Gaußsche Integralformel

$$\int \mathbf{Grad}\, \varphi \cdot d V = \int \varphi\, \mathfrak{N}\, d O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

wenn das Integral rechts über die ganze Oberfläche von V erstreckt wird. Denn die drei ersten skalaren Komponenten von (43) sind unmittelbar (skalare) Gaußsche Transformationsformeln und die drei anderen behandelt man nach dem Muster

$$\int\left(y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) d V = \int\left(\frac{\partial (y\varphi)}{\partial z} - \frac{\partial (z\varphi)}{\partial y}\right) d V = \int \varphi\, [y \cos(\mathfrak{N}, z) - z \cos(\mathfrak{N}, y)]\, d O.$$

Nennen wir $\mathfrak{J}'$ den Gesamtimpuls der in V eingeschlossenen Flüssigkeitsmasse, dessen Ableitung nach t rechts in (37) auftritt, so haben wir im Hinblick auf (41) und (43)

$$\mathfrak{J}' = \mu \int \mathfrak{v} \cdot d V = \mu \int \mathbf{Grad}\, \varphi \cdot d V = \mu \int (\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{G})\, \mathfrak{N}\, d O,$$

wobei das letzte Integral auf O allein beschränkt werden kann, da $\mathfrak{U}$ längs F nach der zweiten Gl. (42) verschwindet. Auf den letzten Integranden wenden wir nun die dyadische Umformung II (21) an: $\mathfrak{N}(\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{G}) = (\mathfrak{N}; \mathfrak{U})\, \mathfrak{G}$. Den Motor $\mathfrak{G}$ kann man bei der Integration herausheben und so wird

$$\mathfrak{J}' = \left[\int \mu\, (\mathfrak{N}; \mathfrak{U})\, d O\right] \mathfrak{G} = \mathsf{T}' \mathfrak{G} \quad \text{mit} \quad \mathsf{T}' = \int \mu\, (\mathfrak{N}; \mathfrak{U})\, d O = \int \mu \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n}; \mathfrak{U}\right) d O \quad (44)$$

unter Benutzung der letzten Gl. (42). Der Impulsmotor der Flüssigkeit ergibt sich als Produkt einer Motordyade T' in den Geschwindigkeitsmotor $\mathfrak{G}$ des Körpers A, der die Bewegung der Flüssigkeit bestimmt. Die Elemente der Dyade sind nach II (19') unmittelbar zu finden:

$$\mathsf{T}'_{\iota\varkappa} = \int \mu\, U_\iota \frac{\partial U_\varkappa}{\partial n}\, d O, \qquad \iota, \varkappa = 1, 2 \ldots 6 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44').$$

Mit Rücksicht auf die erste Gl. (42) ergibt die Greensche Formel

$$\int \left(U_\iota \frac{\partial U_\varkappa}{\partial n} - U_\varkappa \frac{\partial U_\iota}{\partial n} \right) dO = \int (U_\iota \Delta U_\varkappa - U_\varkappa \Delta U_\iota)\, dV = 0$$

die Symmetrie der neuen »Trägheitsdyade« T'.

Besitzt der starre Körper A die Trägheit T und bewegt er sich unter dem Einfluß der von der Strömung herrührenden Kraft $\mathfrak{K}$ und weiterer Kräfte mit der Resultierenden $\mathfrak{P}'$, so kann man seine Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}(\mathsf{T} \cdot \mathfrak{G}) = \mathfrak{P}' + \mathfrak{K},$$

indem man das letzte Glied von $\mathfrak{K}$ auf die linke Seite bringt, in der Form

$$\frac{d}{dt}[(\mathsf{T} + \mathsf{T}')\,\mathfrak{G}] = \mathfrak{P} + \mathfrak{P}' + \int \mathfrak{p}\, dF \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

schreiben. Der »dynamische Einfluß« der Flüssigkeitsströmung auf den starren Körper äußert sich also restlos in einer scheinbaren »Vermehrung seiner Trägheit«; die einzelnen Zusatzwerte, die zu den Elementen der ursprünglichen Trägheitsdyade hinzukommen, sind durch (44') gegeben. Da T' zwar symmetrisch ist, aber im allgemeinen nicht die viel weiter spezialisierte Form der gewöhnlichen Trägheitsdyade besitzt, kann man die Vorstellung der »Trägheitsvermehrung« nicht in allen Einzelheiten aufrechterhalten. Beispielsweise läßt sich im allgemeinen keine Zahl m' definieren, die additiv zu m hinzutritt usf. Auf die weiteren daraus hervorgehenden Beziehungen hinsichtlich der Hauptachsen und ähnliches gehen wir hier nicht ein.

Für die kinetische Energie E' der in V enthaltenen Flüssigkeit ergibt das Verfahren der Motorrechnung ebenfalls eine sehr einfache Darstellung. Nach dem Gaußschen Satz ist

$$E' = {}^1/_2 \int \mu\, (\mathrm{grad}\ \varphi)^2\, dV = {}^1/_2\, \mu \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dO.$$

Setzt man den Wert für φ aus (41) ein, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} 2E' &= \int \mu\, (\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{U}) \left(\mathfrak{G} \cdot \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n}\right) dO = \mathfrak{G} \int \mu\, \mathfrak{U} \left(\mathfrak{G} \cdot \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n}\right) dO \\ &= \mathfrak{G} \cdot \int \mu \left(\mathfrak{U}\,;\, \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n}\right) \mathfrak{G} \cdot dO = \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{J}' \end{aligned} \right\} \quad (46),$$

d. h. die lebendige Kraft der Flüssigkeit drückt sich durch ihren Impuls $\mathfrak{J}'$ und den Geschwindigkeitsmotor $\mathfrak{G}$ so aus wie die eines starren Körpers. Mit anderen Worten: Auch für die kinetische Energie des aus dem starren Körper und der Flüssigkeit bestehenden Systems kann man die Vorstellung der »Trägheitsvermehrung« verwenden. Es ist die Gesamtenergie des Systems gleich der eines starren Körpers, der sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{G}$ bewegt und die Trägheitsdyade $\mathsf{T} + \mathsf{T}'$ besitzt.

Die Gl. (45) wird gewöhnlich auf die Bewegung eines starren Körpers in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit angewendet. Die Abschlußfläche $\varphi = 0$ liegt dann vollständig im Unendlichen und man schließt aus allgemeinen Sätzen der Potentialtheorie, daß $\mathfrak{p} = 0$, das Integral rechts in (45) also fortgelassen werden darf. Sowohl die begriffliche Fassung wie die rechnerische Ableitung der Bewegungsgleichung wird durch Verwendung des Motorbegriffes wesentlich vereinfacht[1]).

9. Bewegungsgleichung eines Flugzeuges. Ein Flugzeug kann kinematisch als starrer Körper angesehen werden; wenn seine einzelnen Teile auch mehr oder weniger elastisch nachgiebig sind, so beeinflußt diese Nachgiebigkeit die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverteilung nur sehr wenig. Von der relativen Beweglichkeit der Steuerteile wie von Propeller und Motor sehen wir für unsere Betrachtung ab. In die Bewegungsgleichung (1), die links den Geschwindigkeitsmotor $\mathfrak{G}$ und die Trägheitsdyade T enthält, gehen rechts folgende Kräfte ein: Die Schwerkraft $\mathfrak{S}$, der Propellerzug $\mathfrak{P}$ und die Luftkräfte, die (abzüglich $\mathfrak{P}$) auf die verschiedenen Teile, wie Tragflügel, Steuerflächen usw. einwirken. Von den Luftkräften dürfen wir voraussetzen, daß sie der Größe und relativen Lage nach nur vom Geschwindigkeitsmotor $\mathfrak{G}$ abhängen, wofern

[1]) Die Darstellung in der deutschen Ausgabe von Lamb, Hydromechanik, Leipzig 1907, § 117 ff. ist völlig verworren. Solange es sich um einen einzelnen starren Körper handelt, ist auch die Heranziehung der Lagrangeschen Gleichungen unbegründet.

auch dieser relativ vom Flugzeug aus beurteilt wird. Mit anderen Worten: Die sechs Komponenten der resultierenden Luftkraft sind Funktionen der sechs Komponenten von $\mathfrak{G}$, wenn alle auf ein im Flugzeug festes Achsensystem bezogen werden. Schreiben wir mithin die Gleichung in der Form (11) an, so haben wir in

$$\mathrm{T}\frac{d'\mathfrak{G}}{dt} + \mathfrak{G} \times (\mathrm{T}\mathfrak{G}) = \mathfrak{S} + \mathfrak{P} + \mathfrak{K} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (47)$$

einen Ansatz, der — soweit es auf die linke Seite und auf $\mathfrak{K}$ ankommt — bei Zerlegung nach einem mitbewegten Koordinatensystem nur die sechs Komponenten $u, v, w; \omega_x, \omega_y, \omega_z$ von $\mathfrak{G}$ und deren Ableitungen nach der Zeit als Variable enthält. Den Propellerzug $\mathfrak{P}$ können wir, seiner relativen Lage und Größe nach, als gegeben ansehen; eine Komplikation bringt aber die Schwere $\mathfrak{S}$ mit sich, die weder relativ zum Fahrzeug, noch im ruhenden Raum unmittelbar gegeben ist. Der Richtung nach ist $\mathfrak{S}$ im ruhenden Raum konstant, die Angriffslinie wird aber vom bewegten Körper mitgenommen. Da nun allgemein nach (4)

$$\frac{d\mathfrak{S}}{dt} = \frac{d'\mathfrak{S}}{dt} + (\mathfrak{G} \times \mathfrak{S})$$

gilt, so hat man als erste Vektor-Komponente hiervon

$$0 = \frac{d'\mathfrak{S}}{dt} + (\mathfrak{G} \times \mathfrak{S}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (48).$$

Bedenkt man, daß der Vektor $\mathfrak{r}$ vom Bezugspunkt nach dem Schwerpunkt in unserem Bezugssystem unveränderliche Komponenten hat, sodaß durch $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{r} \times \mathfrak{S}$ die 4. bis 6. Komponente von $\mathfrak{S}$ mit den ersten drei gegeben ist, so sieht man, daß die Motorgleichung (47) mit der Vektorgleichung (48) zusammen ein vollständiges System von 9 Differentialgleichungen erster Ordnung für die 6 Komponenten von $\mathfrak{G}$ und die 3 Komponenten von $\mathfrak{S}$ bildet. Durch skalare Multiplikation von (48) mit $\mathfrak{S}$ findet man leicht die natürlich von vornherein bekannte Beziehung $d'(\mathfrak{S}^2)/dt = 0$, die das Integral $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 =$ konst. ergibt, sodaß man das Integrationsproblem als ein solches von achter Ordnung erkennt.

Die sogenannte »Kreiselwirkung« der im Flugzeug rotierenden Teile läßt sich mit großer Annäherung auch noch leicht berücksichtigen. Die Kräfte rechts in (47) wirken eigentlich auf das ganze, aus dem Flugzeug selbst und dem Propeller zusammengesetzte System. Daher muß links auch der Impulszuwachs für beide starre Körper stehen. Nun haben die rotierenden Teile, wie wir annehmen dürfen, eine relativ zum Flugzeug nahezu unveränderliche Trägheitsdyade T' (genau genommen gilt das nur für reine Drehkörper) und eine unveränderliche Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{G}'$. Vom Impuls $\mathrm{T}'(\mathfrak{G} + \mathfrak{G}')$ ist der erste Teil schon berücksichtigt, wenn man T entsprechend rechnet, der zweite gibt einen Zuwachs $\mathfrak{J}'$ zum Impuls, nämlich das Produkt aus Drehgeschwindigkeit und Trägheitsmoment der rotierenden Teile, als Momentvektor in Richtung der Propellerachse. Es tritt somit links in (47) noch $\mathfrak{G} \times \mathfrak{J}'$ hinzu, was nur in der Momentkomponente wirksam wird; der Ausdruck $\mathfrak{J}' \times \mathfrak{G}$ auf die rechte Seite, neben die eingeprägten Kräfte gebracht, repräsentiert die »Kreiselwirkung« in der üblichen Ausdrucksweise.

Wählen wir als Bezugssystem die durch den Schwerpunkt gehenden Hauptachsen des Flugzeuges, so lauten die Komponentengleichungen von (47)

$$\left.\begin{array}{l} m(\dot{u} + \omega_y w - \omega_z v) = S_1 + P_1 + K_1, \; . \; . \; . \; . \\ T_x \dot{\omega}_x + (T_z - T_y)\,\omega_y \omega_z + \omega_y J_z' - \omega_z J_y' = P_4 + K_4, \; . \; . \; . \; . \end{array}\right\} \quad . \quad (49).$$

Hierin sind natürlich P_4, K_4 . . . . die Momentkomponenten des Propellerzuges und der Luftkräfte. Zu den sechs Gl. (49) kommen dann noch die drei Komponenten von (48):

$$0 = \dot{S}_1 + \omega_y S_3 - \omega_z S_2 = \dot{S}_2 + \omega_z S_1 - \omega_x S_3 = \dot{S}_3 + \omega_x S_2 - \omega_y S_1 \quad . \quad (50).$$

Eine stationäre Bewegung, bei der alle Ableitungen nach der Zeit verschwinden, ist zufolge (48) nur möglich, wenn $\mathfrak{G}$ vertikal ist, die Bewegung also aus einer beliebigen Translation und einer Drehung um eine vertikale Achse besteht. Nehmen wir an, die Vertikale sei eine Trägheits-Hauptachse (und vernachlässigen die Kreiselwirkung des Propellers), so zeigt (49), daß die Kräfte eine durch den Schwerpunkt gehende, wagerechte Resultierende besitzen müssen, die senkrecht zur Schwerpunktgeschwindigkeit steht und gleich dem Produkt dieser Geschwindigkeit in die Masse und die Drehgeschwindigkeit ist. Bei reiner Translation bilden die Kräfte natürlich ein Gleich-

gewichtssystem. Da $\mathfrak{K}$ von den Geschwindigkeiten abhängt, kommt es darauf an, ob und welche Lösungen für u, v, w, S_1, S_2, S_3 die Gleichungen

$$\mathfrak{S} + \mathfrak{P} + \mathfrak{K} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (51)$$

mit $\omega = 0$ zulassen. Die Verhältnisse der S bestimmen die Stellung des Flugzeuges gegen die Vertikale, die u, v, w Größe und Lage des Translationsvektors relativ zum Flugzeug.

Nehmen wir nun an, es sei $\mathfrak{G}^0$ ein möglicher stationärer Geschwindigkeitszustand, $\mathfrak{K}^0$ der zugehörige Wert der Luftkraft usf. und es möge die wirkliche Bewegung eine kleine Abweichung von der stationären sein, sodaß in $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^0 + \mathfrak{G}'$ usf. die $\mathfrak{G}' \ldots$ in höheren Potenzen vernachlässigbar sind. Es folgt aus (47) und (48) das System *linearer* Differentialgleichungen für $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{S}'$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{T}\frac{d'\mathfrak{G}}{dt} + \mathfrak{G}' \times (\mathbf{T}\,\mathfrak{G}^0) + \mathfrak{G}^0 \times (\mathbf{T}\,\mathfrak{G}') &= \mathfrak{S}' + \mathfrak{P}' + \mathfrak{K}' \\ \frac{d'\mathfrak{S}}{dt} + (\mathfrak{G}^0 \times \mathfrak{S}') + (\mathfrak{G}' \times \mathfrak{S}^0) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (52).$$

Hierin ist $\mathfrak{K}'$ eine lineare homogene Funktion von $\mathfrak{G}'$, wird also durch eine *Motordyade* dargestellt:

$$\mathfrak{K}' = \mathsf{M} \cdot \mathfrak{G}' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (52').$$

Die Gl. (52) und (52′), worin die Elemente von M als gegebene, eventuell von $\mathfrak{G}^0$ abhängige Konstante anzusehen sind, bestimmen die *kleinen Schwingungen* um den stationären Bewegungszustand. Die Komponentengleichungen sind unmittelbar abzulesen. Wir wollen sie für den folgenden Spezialfall explizite anschreiben. Das Flugzeug habe eine Symmetrieebene, die bei der stationären Bewegung vertikal steht; diese sei eine reine Translation mit den Komponenten u^0, w^0 bei $v^0 = 0$, wobei die Symmetrieebene die x-z-Ebene bildet. Der Propellerzug sei unveränderlich, die Kreiselwirkung des Propellers werde vernachlässigt. Dann folgt aus (52) oder auch aus (49) und (50) das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} &m\,(\dot{u}' + w^0\,\omega_y) = S_1' + K_1', \qquad m\,(\dot{v}' + u^0\,\omega_z' - w^0\,\omega_x) = S_2' + K_2', \\ &m\,(\dot{w}' - u^0\,\omega_y') = S_3' + K_3'; \quad T_x\,\dot{\omega}_x' = K_4', \quad T_y\,\dot{\omega}_y' = K_5', \quad T_z\,\dot{\omega}_z' = K_6'; \\ &\dot{S}_1' = -S_3\,\omega_y', \qquad \dot{S}_2' = S_3\,\omega_x' - S_1\,\omega_z', \qquad \dot{S}_3' = S_1\,\omega_y' \end{aligned}\right\} \quad (53).$$

Das Vorhandensein einer Symmetrieebene, in die auch der Vektor der stationären Geschwindigkeit fällt, hat aber auch noch eine Besonderheit für $\mathfrak{K}'$ bezw. für M in (52′) zur Folge. Besteht nämlich die Zusatzbewegung nur in einer Drehung um eine zur Symmetrieebene senkrechte Achse (die auch unendlich fern liegen kann), so hat die zusätzliche Luftkraft sicher eine Resultierende in der Ebene oder bildet ein Kräftepaar, das in der Ebene liegt; umgekehrt, wenn die Zusatzbewegung Drehung um eine in der Symmetrieebene liegende Achse ist, wird die Zusatzkraft senkrecht zu der Ebene stehen. Analytisch ausgedrückt: Es hängen K_1', K_3', K_5' nur von u', w', ω_y' und K_2', K_4', K_6' nur von v', ω_x', ω_z' ab. Man sieht, daß dann die Gl. (53) in zwei voneinander unabhängige Gruppen zerfallen. Die eine, umfassend die erste, dritte, fünfte, siebente und neunte Gleichung, enthält nur die Variablen u', w_x, ω_y', S_1', S_3', während in den vier übrigen Gleichungen nur die Variablen v', ω_x', ω_y', S_2' auftreten. Mit Rücksicht auf das oben schon erwähnte allgemeine Integral bildet jede Gleichungsgruppe ein Integrationsproblem vierter Ordnung. Man unterscheidet bekanntlich in der Stabilitätstheorie die beiden Teile des Gesamtproblems als die Theorie der *Längs- und die Querschwingungen* des Flugzeuges [1]).

10. Die dreidimensionalen Spezialfälle. Anwendungen in der Statik.

Die eben angestellte Betrachtung über die Zerlegung eines sechsdimensionalen Bewegungsproblems in zwei dreidimensionale legt es nahe, die Spezialfälle zu untersuchen, die dadurch entstehen, daß man von den sechs Motorkomponenten einzelne grundsätzlich unterdrückt und in dieser Weise zu Gebilden niederer Dimension übergeht. Wir wollen einige kurze Bemerkungen dazu geben und uns dabei hauptsächlich um die Fragen der *Statik starrer Körper* kümmern.

[1]) Die Gleichungen sind ohne Verwendung des Motorbegriffes unter näherem Eingehen auf den Zusammenhang zwischen Luftkraft und Geschwindigkeit in meinem Referat »Dynamische Probleme der Maschinenlehre«, Enzykl. d. math. Wiss., Bd. IV, Artikel 10, behandelt. Vergl. Bd. IV, 2. Teilband, S. 343 ff.

Zunächst ist es klar, daß man durch Unterdrückung der vierten bis sechsten Skalarkomponente aller Motoren auf die gewöhnliche Vektorrechnung zurückkommt. Vom Standpunkt der Statik heißt dies: auf die Probleme des Gleichgewichts am materiellen Punkt. Genau so liefert die Beibehaltung der vierten bis sechsten Komponente allein die Statik des Körpers, von dem ein Punkt festgehalten wird. Hier sind aber von größerem Interesse zwei andere dreidimensionale Spezialfälle, nämlich: Unterdrückung einer (skalar gezählt) Resultantkomponente und der beiden anderen Momentkomponenten und umgekehrt zweier Resultantkomponenten und der dritten Momentkomponente. Im ersten Fall haben wir, wenn wir von jedem Motor $\mathfrak{A}$ etwa A_1, A_2 und A_6 beibehalten, statisch gesprochen, das ebene Kräftesystem vor uns, und zwar mit der x-y-Ebene als Kraftebene. A_1, A_2 sind die beiden Komponenten der Kraft, A_6 ist das Moment der Kraft bezogen auf einen Punkt der Ebene selbst; mit anderen als mit diesem Moment hat man es in der ebenen Statik nicht zu tun. Der zweite, in gewissem Sinn zu dem ersten dualen Fall ist der der Beibehaltung von A_3, A_4, A_5. Er bedeutet in der Statik ein System paralleler Kräfte, das man auch als System kotierter oder mit Massen belegter Punkte in einer Ebene auffassen kann. A_3 ist die Größe der Kraft (in der z-Richtung) oder die Größe der Massenbelegung ihres Durchstoßpunktes mit der x-y-Ebene, A_4 und A_5 sind die Komponenten des Momentes des Kraft, bezw. des statischen Momentes der Masse bezogen auf einen Punkt der Ebene.

Es ist nun interessant, zu sehen, daß beide Spezialfälle des Motors eine umkehrbar eindeutige Abbildung auf die Vektoren des dreidimensionalen Raumes gestatten, in dem Sinne, daß die Aufgaben der ebenen Statik und der Parallelstatik in solche der Punktstatik übergehen. Für den Fall des ebenen Kräftesystems habe ich die Abbildung bei früherer Gelegenheit durchgeführt, mit dem Ziele, die Aufgaben der Statik räumlicher Kräftesysteme der konstruktiven Behandlung in einer Zeichnungsebene zugänglich zu machen[1]). Der Zusammenhang zwischen der »ebenen« Kraft A_1, A_2, A_6 und einem Raumvektor A_1', A_2', A_3' wird hierbei durch die Gleichungen

$$A_1 = A_1', \qquad A_2 = A_2', \qquad A_6 = c\,A_3' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

vermittelt, wobei c eine ein für allemal gewählte Reduktionsstrecke bezeichnet. Die geometrische Beziehung zwischen den beiden Gebilden ist in Abb. 10 zum Ausdruck gebracht. Wenn wir vom Raumvektor oa ausgehen, ist die Größe und Richtung der abbildenden ebenen Kraft gleich der Projektion oa' des Vektors auf die Ebene, während die Angriffslinie A gegen den Bezugspunkt o um die Strecke $c \operatorname{tg} \varphi$ verschoben ist. Daß die Additionsgesetze sich bei dieser Abbildung übertragen, geht unmittelbar aus (54) hervor.

Für den Fall des Parallelsystems der Kräfte ist eine Abbildung auf die Vektoren schon in den Grundlagen des sogenannten baryzentrischen Kalküls gegeben. Analytisch wird die Beziehung zwischen der »Parallelkraft« A_3, A_4, A_5 und dem Raumvektor A_1'', A_2'', A_3'' durch

$$A_1'' = c\,A_3, \qquad A_2'' = A_5, \qquad A_3'' = -A_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

dargestellt, den geometrischen Zusammenhang deutet Abb. 11 an. Geht man hier wieder vom Raumvektor oa aus, so erhält man die Lage des Massenpunktes oder die Angriffslinie der Parallelkraft, indem man oa durch eine zur Richtung der Kräfte senkrechte Ebene in der Entfernung c von o schneidet, und die Größe der Kraft oder der Masse als

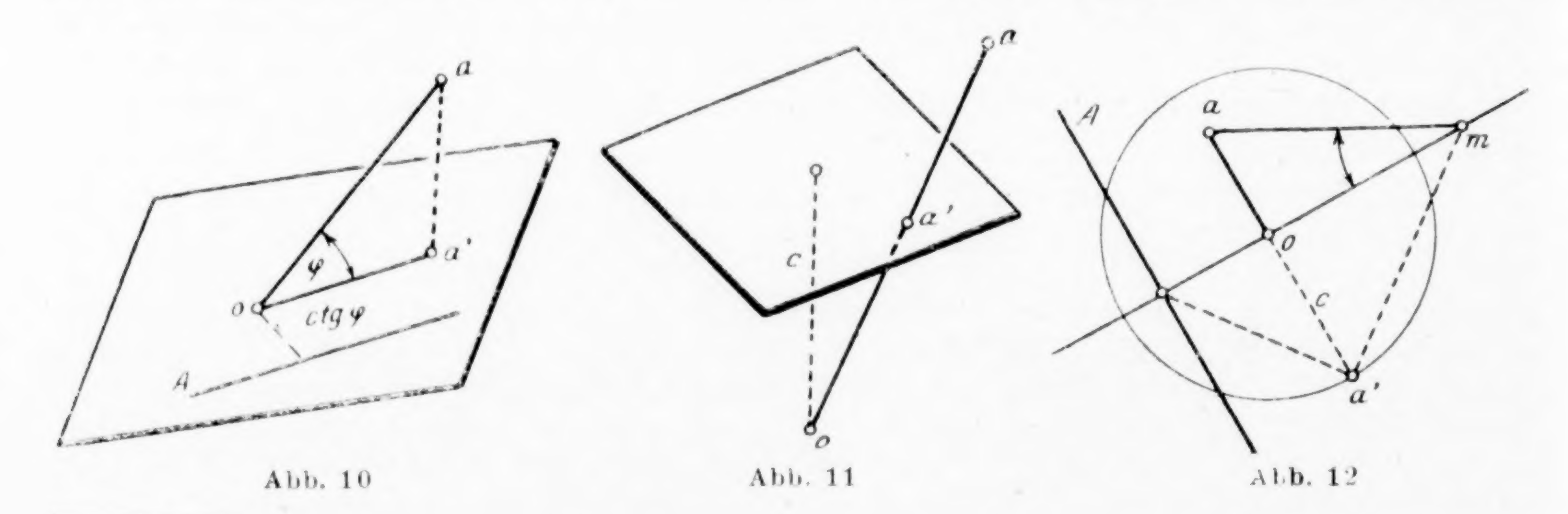


Abb. 10 Abb. 11 Abb. 12

[1]) Graphische Statik räumlicher Kräftesysteme. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 64, 1917, S. 209 bis 232.

Quotienten von oa durch die Entfernung oa' des Durchstoßpunktes wählt. Wieder zeigen die Transformationsformeln (55) unmittelbar, daß die Addition der Raumvektoren und die der Parallelkräfte einander entsprechen. Da man baryzentrische Additionsaufgaben, wenn es sich um nur wenige Massenpunkte handelt, bequem konstruktiv lösen kann, hat Runge gelegentlich die durch (55) definierte Abbildung benutzt, um Aufgaben der räumlichen Vektoranalysis in die Ebene zu übertragen. Da aber die konstruktiven Methoden nirgends so gut durchgebildet sind wie im Falle des ebenen Kräftesystems, so wird es manchmal auch von Nutzen sein, den Uebergang vom Parallelsystem zum ebenen System zu vollziehen, wie er durch die Gleichungen

$$A_4 = c\,A_1, \qquad A_5 = c\,A_2, \qquad c\,A_3 = A_6 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (56)$$

definiert wird. Geometrisch ergibt sich der Zusammenhang, wenn man die Parallelkräfte als Punktmassen deutet, durch rein ebene Konstruktion wie sie Abb. 12 andeutet: Ist m die Lage des Massenpunktes (Durchstoßpunkt der Parallelkraft), so erhält man Größe und Richtung oa der abbildenden ebenen Kraft, indem man an om den Winkel, dessen tangens gleich $A_3 : c$ ist, anträgt, und die Angriffslinie A als Antipolare von m bezüglich des Kreises um o mit dem Radius c, indem man oa' gleich c macht und in a' das Lot zu ma' errichtet. Auf Grund dieser Uebertragung wird jede ebene Schwerpunkt-Ermittlung durch Konstruktion eines Kraft- und eines Seileckes geleistet.

Auf die Probleme der Kinetik übertragen sich diese Beziehungen nicht vollkommen. Nur die ebene Bewegung einer Scheibe bildet einen in sich geschlossenen dreidimensionalen Spezialfall der allgemeinen Kinetik (wie natürlich die Punktbewegung und die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt). Hier ist der Geschwindigkeitsmotor ein Rotor mit zur Ebene senkrechter Achse, er gehört also einem Parallelsystem an, während Impuls- und Kraftmotor in die Ebene fallen. Jede Aufgabe der ebenen Bewegung läßt sich auf eine dreidimensionale Punktbewegung restlos abbilden. Anders aber steht es mit dem hier noch heranzuziehenden Fall der Bewegung eines Körpers mit einer Symmetrieebene. Ist die Geschwindigkeit ein in diese Ebene fallender Rotor, so ergibt sich als Impuls ein zur Ebene senkrechter — soweit besteht die Analogie noch. Aber wenn wir jetzt auch annehmen, daß die Kraft ebenfalls senkrecht zur Ebene steht, so behält der Impuls doch nicht diese Eigenschaft bei. Die Störung bewirkt der zweite Ausdruck links in der Bewegungsgleichung: das motorische Produkt zweier zueinander senkrechter Rotoren liegt in der gemeinsamen Normalen der beiden Achsen, ist also komplanar zu jedem der beiden Faktoren, aber parallel zu keinem. Bei der in **9** behandelten Flugzeugaufgabe lag die Besonderheit darin, daß es sich um kleine Schwingungen handelte, sodaß zufolge der Vernachlässigung der Glieder höherer Dimension das Produkt von Geschwindigkeit und Impuls nicht voll zur Geltung kam. 411

Zur Konstruktion von Tragflächenprofilen.

Von **WILHELM MÜLLER** in Hannover.

Die allgemeinen Entwicklungen des einleitenden Aufsatzes[1]), in dem der stationäre Strömungsverlauf der Luft als einer idealen Flüssigkeit um Tragflügelprofile durch konforme Uebertragung auf die zyklische Kreisströmung und die Abhängigkeit der dabei auftretenden Auftriebskräfte von den »Invarianten« des Profils analysiert wird, sollen im folgenden durch eine spezielle Betrachtung ergänzt werden.

Das zuerst von Trefftz und v. Kármán eingeführte, aus dem Kreiszweieck ableitbare und durch vier Parameter bestimmte Eckenprofil, von dem ich ausgehe, eignet sich als erste Näherungsform für eine große Reihe der gebräuchlichen Profiltypen. Um dies durch ein Beispiel zu zeigen und zugleich die Brauchbarkeit der allgemeinen Formeln zu bestätigen, habe ich den versuchsmäßig ermittelten Auftriebsverlauf eines Göttinger Profils mit den theoretischen Werten verglichen. An den besonderen, seit langem bekannten Joukowskyschen Fall habe ich einige Rechnungen angeknüpft, die für eine allgemeine Profilanalyse von Nutzen sein dürften.

Für die Ableitung allgemeiner Profilformen aus dem Kreise scheint das von v. Mises angegebene Verfahren, das von der Betrachtung der Nullstellen der Ableitung

[1]) Diese Zeitschrift, 3, 1923, S. 117. Ich werde diesen Aufsatz im folgenden als »P I« zitieren.

der abbildenden Funktion ausgeht, am natürlichsten und fruchtbarsten zu sein. Es ist im folgenden eine empirische Uebersicht über einige typische Gestalten angestrebt, die als Grundlage dienen kann für die Lösung der Aufgabe, zu einem vorgelegten Profile die Auftriebsinvarianten zu ermitteln; zu dieser Aufgabe hoffe ich einen Beitrag in einem weiteren Aufsatze geben zu können.

1. Aus dem Kreiszweieck abgeleitete Eckenprofile. Um eine größere Mannigfaltigkeit von Profilformen aus dem Kreise durch konforme Abbildung zu erhalten, kann man nach v. Kármán und Trefftz [1]) folgende allgemeine Abbildungsfunktion ansetzen:

$$\frac{z-A}{z-B} = \left(\frac{\zeta - A'}{\zeta - B'}\right)^{\frac{2\pi - \vartheta}{\pi}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

wo A und B zwei Punkte in der z-Ebene, A' und B' zwei solche in der ζ-Ebene bedeuten. Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, wollen wir uns zunächst vorstellen, daß beim Aufeinanderlegen beider Ebenen beide Punktepaare zusammenfallen ($A = A'$, $B = B'$). A, B nennen wir die Pole, $\frac{2\pi - \vartheta}{\pi} = k$ den Exponenten der Abbildung.

Jeder Kreis K' der ζ-Ebene durch die Pole wird in ein Kreisbogenzweieck mit den Ecken A, B und dem Eckenwinkel ϑ verwandelt. Die Zweiecke der dem Kreisbüschel durch A und B entsprechenden Schar unterscheiden sich nur durch ihre »mittlere Wölbung«, die man sich durch den durch A, B gehenden mittleren, d. h. die Eckenwinkel halbierenden Bogen dargestellt denken kann. Die Wölbung wird wesentlich abhängen von dem Winkel φ, den die Radien AM' und BM' des Kreises mit AB bilden.

Wenn man in (1) das Reelle vom Imaginären trennt, so ergibt sich

$$\frac{r'}{r} = \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^k, \qquad \psi = k\Theta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

wo $r' = |z - A|$, $r = |z - B|$, $\varrho' = |\zeta - A|$, $\varrho = |\zeta - B|$ und ψ und Θ die Winkel bedeuten, unter denen der Polabstand AB von einem Punkt z des Zweiecks C' resp. von einem Punkte ζ des Kreises aus erscheint. Sind $\alpha_1\, \alpha_2$ die Winkel zwischen AB und den Tangenten an die Bogen des Zweiecks ($\alpha_1 - \alpha_2 = \vartheta$), so ergibt sich

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{k} = 2\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2a)$$

und

$$\alpha_1 = \varphi k + {}^1\!/_2\, \pi (2 - k) = \pi - k\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right); \quad \alpha_2 = k\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) - \pi.$$

Um nun der flugtechnischen Praxis angepaßte unsymmetrische Formen aus der Zweiecksform abzuleiten, nehmen wir einen Kreis an, der nur durch einen Pol A hindurchgeht, den andern Pol B aber in seinem Innern nahe der Peripherie enthält. In der Abbildung des Kreises bleibt alsdann nur die eine als Spur der »Hinterkante« des Tragflügels anzusehende Ecke übrig mit dem Kantenwinkel $\vartheta = (2 - k)\pi$, während der andere Pol wieder umschlossen, also eine Singularität an dieser Stelle vermieden wird. Für die Verwendung zu Tragflügeln kommen Kantenwinkel etwa von der Größe 0 bis 36° in betracht, das gibt für k Werte von 2 bis 1,8.

Sei M' der Mittelpunkt des Kreises K' durch A und B, welcher K in A berührt, so daß beide Mittelpunkte mit A in einer Geraden liegen oder $MAB = M'AB = \alpha$ ist. K' transformiert sich in ein Kreiszweieck mit den Ecken A und B, K dagegen in eine Profilkurve, welche die Bogen des Zweiecks in A berührt. Wie K mit K' nur A gemeinsam hat, im übrigen diesen Kreis umschließt, so umschließt auch das Profil C das Zweieck C' (Abb. 1). Die Schar der Kreise, die K' in A berühren, deren Zentren also auf AM' liegen und die außerdem B umschließen, transformiert sich in eine Schar von Profilen, die in der Wölbung und dem Eckenwinkel bei A übereinstimmen und nur in der Dicke sich unterscheiden. Im ganzen ist die Wölbung von φ, die Dicke besonders im mittleren und hinteren Profilabschnitt von k (resp. ϑ), die Krümmung oder Dicke im vorderen Abschnitt von $\delta' = R - R'$ abhängig. Man kann also je nach Wahl von δ', k und φ bei festliegenden Polen über Dicke und Wölbung beliebig verfügen.

---

[1]) Vergl. v. Kármán und Trefftz, Potentialströmung um gegebene Tragflächenquerschnitte, Zeitschr. für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, IX. Jahrgang, 1918, Heft 17/18, S. 111. — Joukowsky, Ueber die Tragflächen des Typus Antoinette, Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou 1913; derselbe, Aérodynamique, Paris 1915, S. 169. — W. M. Kutta, Ueber ebene Zirkulationsströmungen, Berichte der Münchener Akademie, 1911, S. 65 bis 125.

Zur Konstruktion eines so definierten Profils benutzt man zwei Kreisscharen, die Schar der Kreise, die AB in einem bestimmten Verhältnis ($\varepsilon : 1$, $\varepsilon^k : 1$) teilen, und die Schar der Kreise durch A und B mit bestimmten aus K abzuleitenden Peripheriewinkeln. In der Abb. 2 ist die Zeichnung eines dicken Profils durchgeführt, dem die folgenden Invarianten zugehören:

$$l = 5, \quad l \operatorname{tg} \vartheta = 0{,}95, \quad \delta' = 0{,}5, \quad k = 1{,}8 \quad (\vartheta = 36^0).$$

Mit großer Annäherung kann man übrigens, wie ich hier nicht näher auseinandersetzen kann, die Eckenprofile durch verallgemeinerte, ebenfalls durch 4 Parameter bestimmte

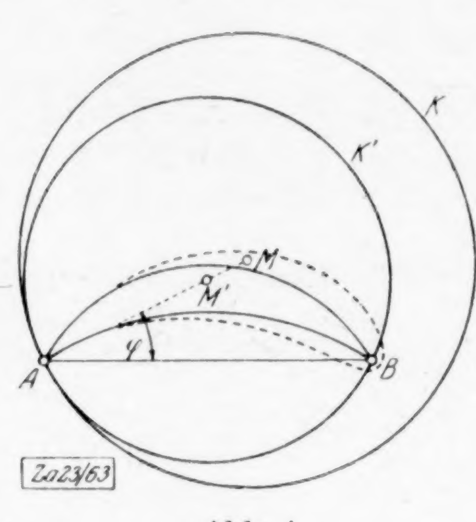


Abb. 1

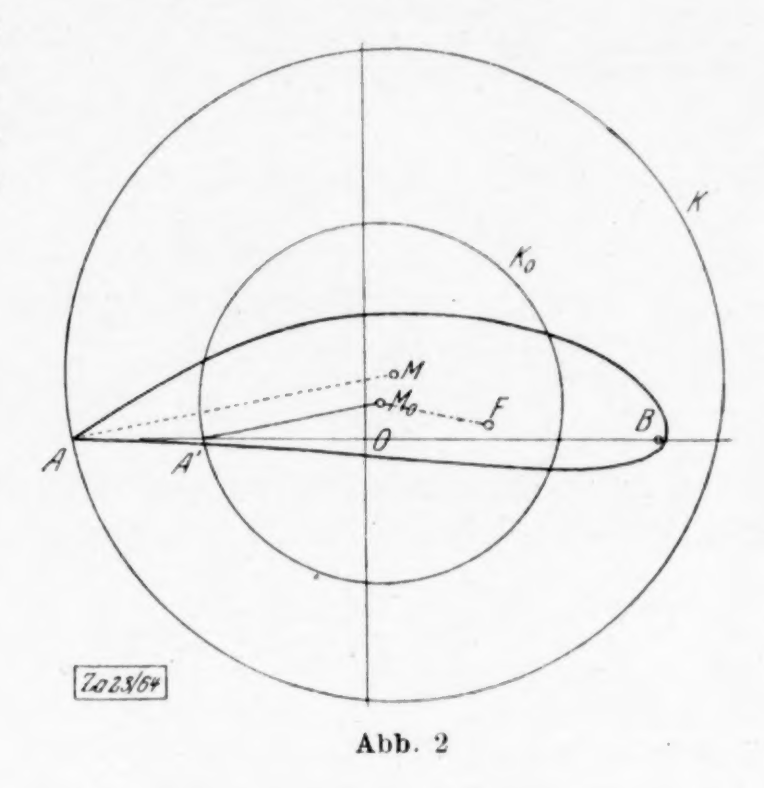


Abb. 2

»virtuelle Parabeln« ersetzen, Kurven vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt und der Gleichungsform

$$y^2 = ax^2 + bx + c + \sqrt{-d^2x^2 + 2bcx + c^2},$$

die sehr einfach zu konstruieren sind.

Wir wählen nun A als Anfangspunkt und AB als reelle Achse sowohl der ζ-Ebene als auch der z-Ebene. Nennen wir ferner $AB = 2l$ (ungefähre Tiefe des Profils), so nimmt die Gleichung (1) die Form an

$$\frac{z-2l}{z} = \left(\frac{\zeta - 2l}{\zeta}\right)^k \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Der zu transformierende Kreis ist

$$(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 = R^2 \quad \text{oder} \quad \xi^2 + \eta^2 - 2\xi R \cos\varphi - 2\eta R \sin\varphi = 0.$$

Entwickelt man ζ, so erhält man

$$\zeta = -(k-1)l + kz - \frac{(k^2-1)l^2}{3kz} - \frac{(k^2-1)l^3}{3kz^2} \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Wir haben also in den allgemeinen Formeln [P I, (1) bis (14)] folgende Werte einzusetzen:

$$c_0 = -(k-1)l, \quad n = k, \quad c_1 = \frac{-(k^2-1)l^2}{3k^2}\left[d^2 = \frac{(k^2-1)l^2}{3k^2}, \ \gamma = 0\right], \quad \zeta_0 = Re^{i\varphi}, \quad \chi = \varphi$$

und gewinnen damit für Auftrieb und Moment einer unter dem »Anstellwinkel« β gegen die negative x-Achse gerichteten zyklischen Profilströmung mit der Geschwindigkeit q im Unendlichen die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= 4\pi\varrho \frac{q^2}{k} R \sin(\varphi + \beta) \\ \mathfrak{M}_A &= 2\pi\varrho \frac{q^2}{k^2}\left\{R^2 \sin 2(\beta + \varphi) + 2(k-1)Rl \sin(\varphi + \beta)\cos\beta + \frac{k^2-1}{3} l^2 \sin 2\beta\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (5),$$

(ϱ Masse der Volumeneinheit des strömenden Mediums).

Schneidet die Auftriebslinie AB im Abstande s von der Spitze A, so findet man

$$s = \frac{M}{A\cos\beta} = \frac{R^2 \sin 2(\beta + \varphi) + 2(k-1)Rl \sin(\beta + \varphi)\cos\beta + \frac{k^2-1}{3} l^2 \sin_2 \beta}{2kR\cos\beta \sin(\varphi + \beta)}$$

$$= \frac{R\cos(\beta + \varphi)}{k\cos\beta} + \frac{(k-1)l}{k} + \frac{(k^2-1)l^2 \sin\beta}{3kR\sin(\beta + \varphi)} \quad \ldots \ldots \quad (6).$$

Wenn man in der Gleichung (4) für den Ausdruck

$$\frac{\zeta + (k-1)\,l}{k}$$

wieder ζ einführt, so wird der Abbildungsmodul im Unendlichen $= 1$ und der Abbildungskreis zum Grundkreis K_0. Ist also die Koordinate des Mittelpunktes M von K

$$\zeta = Re^{i\varphi},$$

so hat der Mittelpunkt M_0 des Grundkreises die Koordinate

$$\zeta_0 = \frac{Re^{i\varphi} + (k-1)\,l}{k} = \frac{R}{k}\,e^{i\varphi} + \frac{k-1}{k}\,l.$$

Der Radius des Grundkreises ist also gleich dem $k$ten Teil des Radius R

$$R_0 = \frac{R}{k}.$$

Verlegt man den Nullpunkt des Koordinatensystems nach der Mitte von AB, so geht die Abbildungsgleichung über in:

$$\frac{z-l}{z+l} = \left(\frac{\zeta - l}{\zeta + l}\right)^k \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7).$$

Wenn man aber auf der rechten Seite die Koordinaten der Punkte der Grundkreisebene einführt, so hat man

$$\frac{z-l}{z+l} = \left(\frac{\zeta - \frac{l}{k}}{\zeta + \frac{l}{k}}\right)^k \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8).$$

Man könnte auch den Kreis K festhalten und die Koordinaten z der Profilebene auf das $k$fache vergrößern und setzen

$$\frac{z-kl}{z+kl} = \left(\frac{\zeta - l}{\zeta + l}\right)^k \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9).$$

Damit fallen die Polpaare der beiden Systeme z und ζ nicht mehr zusammen. Wir werden, wenn nötig, die ζ-Pole A' und B', die z Pole A und B nennen, ebenso die Längen AB und $A'B'$ durch $2l_c$ und $2l_k$ unterscheiden. Die Entwicklung von ζ beginnt im Falle (8) dann folgendermaßen:

$$\zeta = z - \frac{k^2-1}{3k^2}\,\frac{l_c^2}{z} - \ldots = z + \frac{c_1}{z} + \ldots \quad \ldots \ldots \ldots (8a)$$

m Falle (9)

$$\zeta = z - \frac{k^2-1}{3}\,\frac{l_k^2}{z} - \ldots \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9a).$$

Wir schließen an diese Entwicklungen einige Betrachtungen an über die Lage der drei charakteristischen Profilachsen. $A'M_0$ ist die erste Achse, AB (oder $A'B'$) ist die zweite Achse des Profils. Um den Brennpunkt F zu finden, verbindet man M_0 mit dem zweiten, von A verschiedenen Schnittpunkt C des Kreises K mit der zweiten Achse und trägt auf M_0C von M_0 aus die Strecke

$$M_0F = f = -\frac{c_1}{R} = \frac{(k^2-1)\,l_k^2}{3R}$$

auf. Die 3. Achse, die in bezug auf M_0 als Anfangspunkt und die Parallele zur 2. Achse als x-Achse nach P I, S. 126, (37) die Gleichung $2x\cos\varphi\,(R-f) + 2y\sin\varphi\,(R+f) = R^2 - f^2$ hat, bildet in unserem Falle mit der 2. Achse einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente lautet:

$$\operatorname{tg}\psi = -\operatorname{ctg}\varphi\left(\frac{3R_0^2 - (k^2-1)\,l_k^2}{3R_0^2 + (k^2-1)\,l_k^2}\right) = -\operatorname{ctg}\varphi\left(\frac{3k^2R_0^2 - (k^2-1)\,l_c^2}{3k^2R_0^2 + (k^2-1)\,l_c^2}\right).$$

Bei festem R und festem Polabstand $A'B' = 2l_k$ oder auch festem Abstand $AB = 2l_c$ wird f um so kleiner, je größer der Eckenwinkel ϑ, wird und damit vergrößert sich der spitze Winkel, den die 2. und 3. Achse miteinander bilden. Dasselbe tritt ein bei einer Verringerung der Krümmung am Vorderende.

Ist die erste Achse, also die Leitlinie der Auftriebsparabel und der Brennpunkt F, ferner Punkt M_0 (resp. $\varphi = \measuredangle MAC$ und R) und der Exponent k gegeben, so ist das Profil C bestimmt. Ebenso kann man das Profil konstruieren, wenn M_0, die Richtungen

der ersten beiden Achsen, die Lage der 3. Achse und k bekannt sind. Denn man findet dann l_k aus

$$l_k^2 = \frac{l_c^2}{k^2} = \frac{3\,Rf}{k^2 - 1}\,.$$

Führt man die für die Krümmuug am Vorderende charakteristische Größe $\delta = \frac{\delta'}{k} = R - \frac{l_k}{\cos\varphi}$ ein, so ergibt sich, daß für alle Profile, die durch eine Transformation vom Charakter 1) aus dem Kreise abgeleitet sind und in den theoretischen Auftriebsverhältnissen übereinstimmen, die Beziehung besteht

$$Rf = \frac{k^2 - 1}{3}\,[\cos\varphi\,(R - \delta]^2.$$

Es folgt daraus z. B., daß eine Vergrößernng von k eine Vergrößerung von δ oder eine Verringerung von φ zur Folge hat. Eine Zuspitzung (resp. Verdünnung) des Profils am Hinterende muß also mit einer Abrundung (Verdickung) am Vorderteil oder mit einer Verringerung der Wölbung Hand in Hand gehen, wenn die Auftriebsverhältnisse dieselben bleiben sollen. Dieses Gesetz werden wir noch allgemein bestätigt finden.

Die Abhängigkeit der Druckpunktwanderung von den Größen k, δ, φ kann am besten aus dem Ausdruck für den Parameter $2h_0$ der Auftriebsparabel abgelesen werden. Er lautet nach v. Mises (vgl. P I, 2)

$$2h_0 = \frac{(k^2 - 1)\,l_c^2 \sin 2\varphi}{3\,k^2\,R_0} = \frac{(k^2 - 1)\,R'^2 \cos^2\varphi \sin 2\varphi}{3\,k\,(R' + \delta')}\,,$$

wo R' den Radius des zum Winkel φ gehörenden und durch die Pole AB gehenden Kreises bedeutet. Die in diesem Ausdrucke enthaltenen Parameter bestimmen die Dicke und die Wölbung des Profils. Bleiben außer k alle Abmessungen konstant, so hängt die Druckpunktwanderung ab von der Funktion $\frac{k^2 - 1}{k}$. Diese Funktion wächst, wenn k von einem Werte < 2 bis zum Werte $k = 2$ zunimmt. Die Druckpunktwanderung wird also um so geringer, je größer der Kantenwinkel ausfällt. Ebenso nimmt h_0 ab, wenn δ zunimmt. Die Verdickung des Profils hat also in jedem Falle eine Verringerung der Druckpunktverschiebung zur Folge. Die Wölbung ist im wesentlichen abhängig von dem Winkel φ. Da die Funktion $\cos^2\varphi \sin 2\varphi$ im Bereiche kleiner Winkel wächst bis zu ihrem Maximum $\varphi = 30^0$, so folgt, daß eine Vergrößerung der Wölbung eine Vergrößerung der Druckpunktwanderung nach sich zieht.

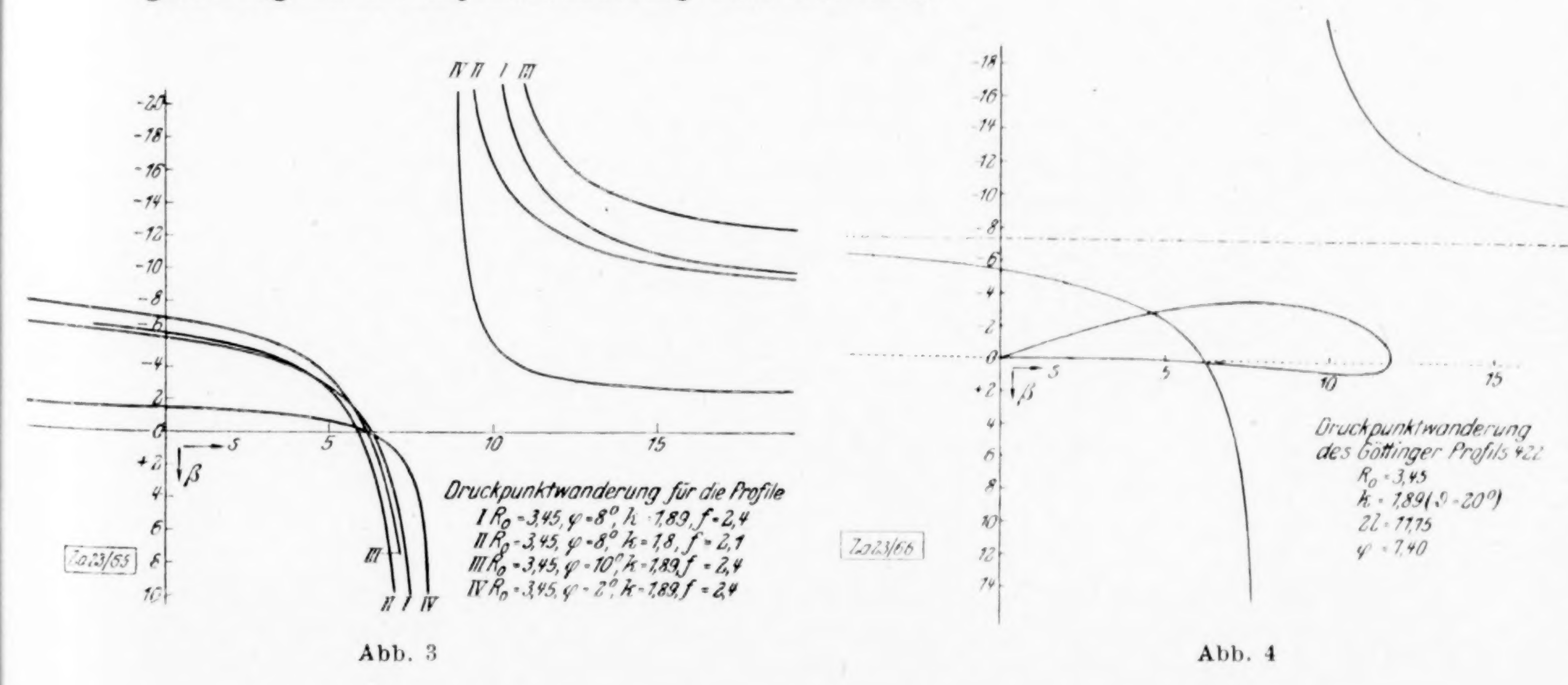


Abb. 3 Abb. 4

In der Abb. 3 haben wir die Druckpunktwanderung, d. h. die Funktion

$$s = \frac{R_0 \cos(\tau + \beta)}{\cos\beta} + (k - 1)\,l_k + \frac{f \sin\beta}{\sin(\varphi + \beta)}$$

mit s als Abszisse und β als Ordinate in einem in der Ecke A anfangenden Koordinatensystem dargestellt und zwar für folgende Profilinvarianten:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{I. } R_0 = 3{,}45, & f = 2{,}4, & \varphi = 8^0, & k = 1{,}89 \\ \text{II. } R_0 = 3{,}45, & f = 2{,}1, & \varphi = 8^0, & k = 1{,}8 \\ \text{III. } R_0 = 3{,}45, & f = 2{,}4, & \varphi = 10^0, & k = 1{,}89 \\ \text{IV. } R_0 = 3{,}45, & f = 2{,}4, & \varphi = 2^0, & k = 1{,}89 \end{array}\right\}$$

In der Abb. 4 ist der Druckpunktverlauf für ein Profil aus der Göttinger Sammlung (Nr. 422)[1]), das mit großer Annäherung durch eine Transformation vom Charakter 1) resp. 2) darstellbar ist, veranschaulicht. Es wurden in dem in den »Ergebnissen« vorliegenden Maßstabe folgende Invarianten ermittelt:

$$2\,l_c = 11{,}75, \quad R - R' = 0{,}6, \quad R = 6{,}52, \quad k = 1{,}89\ (R_0 = 3{,}45, \vartheta = 20^0), \quad \varphi = 7{,}4^0.$$

Die Asymptote der hyperbelartig verlaufenden Druckpunktkurve liegt parallel zur Hauptachse im Abstande $\beta = -\varphi$. Die vertikale Tangente dagegen berührt die Kurve im Endlichen in den Punkten, die den Anstellwinkeln

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{\frac{f}{R}} - \sin\varphi}{\cos\varphi}\right) \infty \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{f}{R}} \begin{array}{l} < 45^0 \\ > -45^0 \end{array}$$

entsprechen. Man sieht ferner, daß der Schnittpunkt mit der x-Achse etwa in die Mitte des Achsendurchmessers fällt.

Um die theoretisch berechneten Werte des Auftriebsmomentes resp. der Druckpunktwanderung mit den in der Göttinger Versuchsanstalt gefundenen Zahlen vergleichen zu können, müssen die dort angegebenen Anstellwinkel, die zunächst von der unteren Profilsehne aus gezählt sind, auf die natürliche 2. Achse reduziert werden. Man hat dann etwa den Winkel $1{,}8^0$ zu dem Göttinger Anstellwinkel zu addieren. Als Momentenachse (resp. Momentenpunkt) ist ferner die zur Profilebene senkrechte Linie durch den Schnittpunkt der Druckseitensehne mit der dazu senkrechten Tangente am Anblaserand gewählt. Die Entfernung der resultierenden Kraft von dieser Achse ist

$$e = 2\,l\,\frac{C_m}{C_n},$$

wo C_m die mit hundert multiplizierte Momentenzahl $= \frac{100\,\mathfrak{M}}{2\,\varrho\,q^2\,l^2}$, C_n die mit hundert multiplierte Normalkraftzahl bedeutet. Für C_n kann man näherungsweise auch die Auftriebszahl C_a setzen. Um das Moment auf die Hinterkante zu beziehen, resp. um das Verhältnis $\frac{s}{2\,l}$ zu erhalten, hat man den in der wiedergegebenen (Göttinger) Zahlentafel zu entnehmenden Bruch $\frac{C_m}{C_a}$ von l zu subtrahieren. Durch Multiplikation mit $2\,l$ erhält man dann eine Reihe von Werten des Druckpunktabstandes s, die mit den berechneten Werten im Bereiche der größeren Anstellwinkel gut übereinstimmen.

β	$\frac{C_m}{C_a}$	s	s (theoretisch)	β	$\frac{C_m}{C_a}$	s	s (theoretisch)
— 6	1,4	— 4,7	— 4,3	6	0,38	7,26	7,21
— 4	0,76	2,7	3,3	8	0,37	7,45	7,4
— 2	0,57	5	5,3	10	0,35	7,6	7,5
0	0,49	6,1	6,2	12	0,345	7,7	7,6
2	0,45	6,6	6,7	14	0,34	7,8	7,7
4	0,41	7	7,02				

Die Abweichung der beobachteten und theoretischen Druckpunktslage rührt wie bekannt in erster Linie von dem induzierten Widerstand her. Die Veränderlichkeit der Zirkulation längs der Flügelspannweite bedingt die Ablösung eines Wirbelbandes am Hinterende, die weiter zur Folge hat, daß der Anstellwinkel β der Strömung, also auch

[1]) Vergl. Ergebnisse der aerodynam. Versuchsanstalt zu Göttingen, herausgegeben von Prandtl, München 1921, S. 79.

der Auftrieb um einen kleinen Betrag verringert erscheint. Dadurch verschiebt sich die Druckpunktslage im Gebiete positiven Auftriebs ($\beta > -\varphi$) nach hinten, im Gebiete negativen Auftriebs dagegen nach vorne, um so stärker, je näher β dem Werte $-\varphi$ kommt.

2. Joukowskysche Spitzenprofile. Die Abbildungsfunktion (7) mit den Polen $+l$ und $-l$ geht für $k = 2$ über in

$$z = {}^1/_2\left(\zeta + \frac{l^2}{\zeta}\right) \quad \text{(10)}.$$

Dadurch wird ein Kreis K' durch $A\,(-l)$ und $B\,(+l)$, dessen Mittelpunkt von A aus gegen AB unter dem Winkel φ gesehen werden möge, übergeführt in den doppelt zu zählenden Kreisbogen $AM'B$, und ein Kreis K, dessen Mittelpunkt M von M' um 2δ entfernt liegt, der also K' in A berührt und den andern Pol B einschließt, in ein Joukowskysches Profil mit einer echten Spitze (also verschwindendem Eckenwinkel) am Hinterende A, dessen »Skelett« durch den Bogen $AM'B$ dargestellt ist. Kehrt man die Funktion (10) um, so gelangt man zu einer Reihe, die folgendermaßen beginnt:

$$\zeta = 2z - \frac{l^2}{2z} - \frac{l^4}{8z^3} \quad \text{(10a)}.$$

Setzen wir $\zeta = 2\zeta'$, so gehen (10) und (10a) über in

$$z = \zeta' + \frac{l^2}{4\zeta'} \quad \text{(11)},$$

$$\zeta' = z - \frac{l^2}{4z} - \frac{l^4}{16z^3} - \frac{l^6}{32z^5} \quad \text{(11a)}.$$

Damit wird das Profil auf den Grundkreis K_0 abgebildet, der durch den Punkt $A'\left(-\frac{l}{2}\right)$ geht, den Punkt $B'\left(+\frac{l}{2}\right)$ einschließt und mit K in bezug auf den Nullpunkt ähnlich gelegen ist. Die Gleichungen (1) und (3) geben ohne weiteres Anleitung zu der bekannten Konstruktion des Profils aus dem Kreise K_1 resp. dem Grundkreis K_0. Man konstruiert nach (10) zunächst den Kreis K_1, der aus K durch Transformation durch reziproke Radien

$$\zeta_1 = \frac{l^2}{\zeta}$$

abgeleitet ist, und bestimmt dann die Mitten der Verbindungslinien entsprechender Punkte von K und K_1, die bekanntlich entgegengesetzte Argumente haben. Der Mittelpunkt M_1 von K_1 liegt auf einer Geraden, die zu OM symmetrisch in bezug auf die η-Achse ist. Der Kreis selbst berührt K in A. Aus dem Grundkreis erhält man ganz entsprechend das Profil, indem man zunächst den reziproken Kreis $K_{(0)1}: \zeta_1 = \frac{l^2}{4\zeta}$ zeichnet und entsprechende, also zur ξ-Achse symmetrisch gelegene Punkte graphisch addiert[1]) (vergl. Abb. 5).

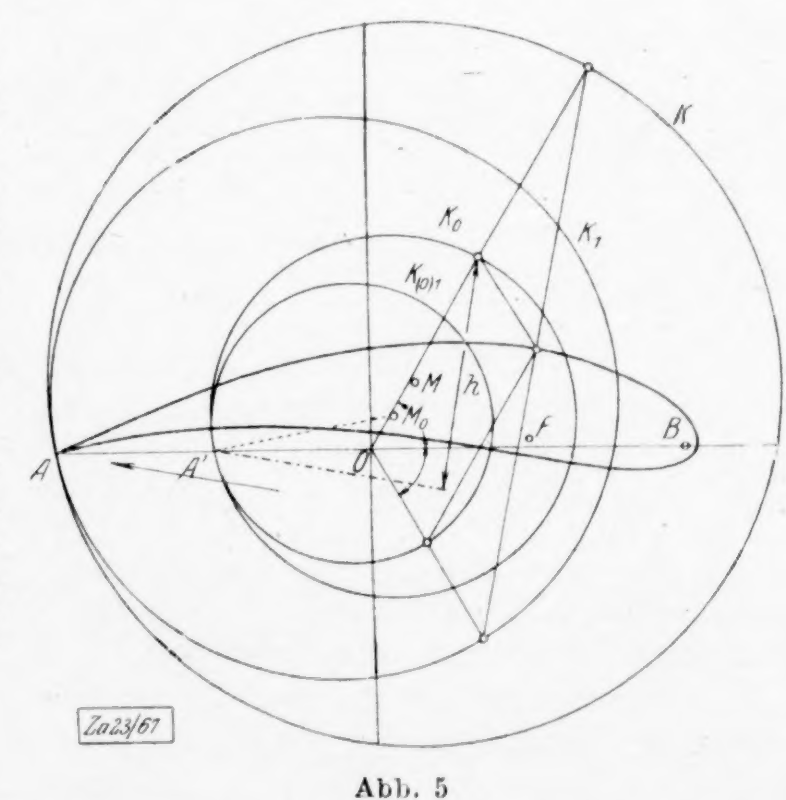


Abb. 5

Für die Berechnung der Strömungsgeschwindigkeit längs des Profilumfanges benutzen wir den in P I [S. 124, (28)] entwickelten Ausdruck für die Strömungsgeschwindigkeit längs des Grundkreises, der nur noch mit

$$\frac{d\zeta'}{dz} = \frac{\zeta'}{\zeta' - \frac{l^2}{4\zeta'}}$$

[1]) Vergl. E. Trefftz, Graphische Konstruktion Joukowskyscher Tragflächen, Zeitschr. für Flugt. u. Motorl. 1910, S. 130. Bildet man die Kreise K' und K auf zwei sich berührende Kreise ab, von denen der eine durch $AM'B$ geht, so gelangt man zu einer anderen Erzeugungsweise, die von Tschapliguine stammt: De la pression sur les corps exposés a un courant planparallèle. Mathematischesky Sbornik, t. XXVIII; Joukowsky, Aërodynamique, S. 150 f.

multipliziert zu werden braucht. Daraus ergibt sich die einfache von Trefftz aufgestellte geometrische Formel für die Geschwindigkeit längs des Profils

$$v_c = \frac{2\,q\,h}{R}\,\frac{\overline{PO}}{\overline{PP_1}},$$

wo q die Strömungsgeschwindigkeit im Unendlichen, h der Abstand des Kreispunktes von der Strömungsrichtung durch den Spaltungspunkt und P und P_1 zwei vermöge $\xi_1 = \frac{l^2}{4\,\xi}$ einander entsprechende Punkte auf den Kreisen K_0 und $K_{(0)1}$ bedeuten. Statt des Kreises K_0 kann man auch K benutzen. Für Auftrieb und Moment in bezug auf O haben wir unmittelbar aus 1, (5) die Werte

$$\mathfrak{A} = 4\,\pi\,\varrho\,q^2\,R_0 \sin(\varphi + \beta) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12),$$

$$\mathfrak{M}_0 = 2\,\pi\,\varrho\,q^2 \left\{ R_0\,\delta \sin 2(\varphi + \beta) - g\,R_0 \sin(\varphi + \beta) + \frac{l^2}{4} \sin 2\beta \right\} \quad \ldots \quad (12a),$$

wo die Größen R_0, δ, l und g durch die der Abbildung zu entnehmenden Beziehungen zusammenhängen,

$$R_0 = {}^1/_2 \sqrt{l^2 + g^2} + \delta, \quad (R_0 - \delta)\cos\varphi = \frac{l}{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{g}{l}.$$

In bezug auf die Spitze hat der Auftrieb das Moment

$$\mathfrak{M}_A = 2\,\pi\,\varrho\,q^2 \left\{ 2\,R_0 \sin(\varphi + \beta)\left(\delta \cos(\varphi + \beta) + l\cos\beta - \frac{g}{2}\sin\beta\right) + \frac{l^2}{4}\sin 2\beta \right\}$$

$$= 2\,\pi\,\varrho\,q^2 \left\{ R_0{}^2 \sin 2(\varphi + \beta) + R_0\,l \sin(\varphi + \beta)\cos\beta + \frac{l^2}{4}\sin 2\beta \right\} \quad \ldots \quad (12b).$$

In bezug auf den Mittelpunkt M_0 des Grundkreises

$$\mathfrak{M}' = {}^1/_2\,\pi\,\varrho\,q^2\,l^2 \sin 2\beta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12c).$$

Die Druckpunktswanderung wird durch den Ausdruck

$$s = \frac{\mathfrak{M}_A}{\mathfrak{A}\cos\beta} = \frac{R_0\cos(\varphi + \beta)}{\cos\beta} + {}^1/_2\,l + \frac{l^2 \sin\beta}{4\,R_0 \sin(\varphi + \beta)} \quad \ldots \quad (13)$$

dargestellt.

Die Folgerungen, die sich daran anschließen, bleiben natürlich dieselben wie im allgemeinen Fall. Der Parameter der Auftriebsparabel hat den Wert

$$2\,h_0 = \frac{l^2 \sin 2\varphi}{4\,R_0}.$$

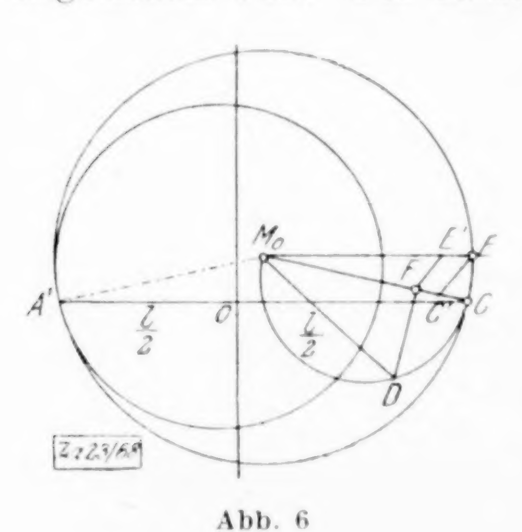


Abb. 6

Schneidet der Kreis K_0 die Sehne $A'B'$ außer in A' noch in C, so liegt der Brennpunkt F auf $M_0\,C$ im Abstand $f = \frac{l^2}{4\,R_0}$. Man kann dann über $M_0\,C$ den Halbkreis zeichnen und von einem Punkte D auf diesem Halbkreis, der von M_0 um $\frac{l}{2}$ entfernt ist, das Lot auf $M_0\,C$ fällen mit F als Fußpunkt. Oder man trägt auf der Parallelen $M_0\,E$ durch M_0 zur 2. Achse $M_0\,E' = \frac{l}{2}$ ab, überträgt $M_0\,E'$ auf $M_0\,C$ bis C' und zieht zu $E\,C'$ durch E' die Parallele bis zum Schnitt F mit $M_0\,C$ (Abb. 6).

Um die Berechnung vorgegebener Profile vorzubereiten, wird es zweckmäßig sein, wichtige Abmessungen Joukowskyscher Formen, z. B. die Dicke und Krümmung aus einer Näherungskurve abzuleiten.

Nennen wir die Polarkoordinaten des Kreises K, r und ψ, so gibt (10) die rechtwinkeligen Koordinaten eines Punktes des Joukowsky-Profils

$$x = {}^1/_2 \cos\psi\left(r + \frac{l^2}{r}\right), \qquad y = {}^1/_2 \sin\psi\left(r - \frac{l^2}{r}\right).$$

Die Gleichung des Kreises K aber ist

$$(\xi - 2\,\delta\cos\varphi)^2 + (\eta - g - 2\,\delta\sin\varphi)^2 = (\sqrt{g^2 + l^2} + 2\,\delta)^2$$

oder

$$r^2 - 4\,r\,\delta\cos(\psi - \varphi) - 2\,r\,g \sin\psi = l^2 + 4\,\delta\sqrt{l^2 + g^2},$$

woraus für r der angenäherte Wert folgt

$$r \sim 2\,\delta\left[\cos(\psi - \varphi) + \frac{\sqrt{l^2 + g^2}}{l}\right] + g \sin \psi + l.$$

Daraus ergibt sich für r der Näherungswert $l \cos \psi$ und damit folgende Näherungsgleichung für das Profil

$$y = \frac{l^2 - x^2}{l^2}(g + 2\,\delta \sin \varphi) + \frac{2\,\delta\sqrt{l^2 - x^2}}{l^2}(x + l) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Ist $g = 0$, also $\varphi = 0$, d. h. die Wölbung $= 0$, so haben wir

$$y = \frac{2\,\delta\sqrt{l^2 - x^2}}{l^2}(x + l).$$

Aus (14) ergibt sich die parallel der y-Achse gemessene Dicke an jeder Stelle

$$d_x = \frac{4\,\delta\sqrt{l^2 + x^2}}{l^2}(x + l) \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14a).$$

Die größte Dicke ist an der Stelle $x = {}^1/_2\, l$, also im vorderen Viertel des Profils, und zwar wird hier

$$d = 3\sqrt{3}\,\delta = 5{,}2\,\delta = 5{,}2\left[R_0 - \frac{l}{2\cos\varphi}\right] \sim 5{,}2\,(R - \sqrt{Rf}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14b).$$

Man sieht daher wieder, daß die Dicke um so kleiner wird, desto mehr der Brennpunkt F der Peripherie von K_0 sich nähert. In dem Ausdruck für d kommt ferner g resp. φ nicht mehr vor; die Dicke ist also wesentlich nur abhängig von δ, von der Wölbung nur in geringfügigem Maße.

Die Dicke für $x = 0$ wird $d_0 = 4\,\delta$. Daraus ergibt sich dann für die mittlere Dicke des Trefftz-Kármánschen Eckenprofils der angenäherte Wert

$$d_0 = 2\,\delta\,k + {}^1/_2\,k\,l_k\,\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14c),$$

wo δ, l_k die früher auseinandergesetzte Bedeutung haben.

Für die Richtung der Tangente an der Stelle x haben wir

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{l^2}(g + 2\,\delta \sin \varphi) + \frac{2\,\delta\sqrt{l^2 - x^2}}{l^2} - (x + l)\frac{2\,\delta\,x}{l^2\sqrt{l^2 - x^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Für die Spitzentangente ergibt sich übrigens aus der allgemeinen Gleichung (2a) für $k = 2$ die strenge Beziehung $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=-l} = \operatorname{tg} 2\,\varphi$. Die Richtung von der Spitze nach dem Mittelpunkt des Kreises halbiert also den Winkel zwischen Spitzentangente und 2. Achse. Die Tiefe des Näherungsprofils ist $= 2\,l$. Die wirkliche Tiefe des Joukowskyschen Profils findet man, wenn man in die Polargleichungen für r die Größe $l + 4\,\delta \cos \varphi$ und $\psi = 0$ setzt. Man erhält dann für die Hälfte dieser Tiefe

$$l' = \frac{l^2 + 4\,l\,\delta\cos\varphi + 4\,\delta^2\cos^2\varphi}{l + 4\,\delta\cos\varphi}.$$

Die Abweichung beider Größen oder der Abstand des Poles B von der Vorderkante ist also etwa $= \frac{8\,\delta^2 \cos\varphi}{l}$, eine im allgemeinen sehr kleine Größe.

Es ist weiter von Interesse, den Krümmungsradius am Vorderende seiner Größenordnung nach zu kennen. Wir bilden daher die zweite Ableitung von (14) und erhalten

$$y'' = -\frac{2\,(g + 2\,\delta\sin\varphi)}{l^2} - \frac{2\,\delta\,(3\,x\,l^2 + l^3 - 2\,x^3)}{l^2\,(l^2 - x^2)^{3/2}}.$$

Damit ergibt sich durch eine einfache Rechnung für den Krümmungsradius an der Stelle $(+\,l, 0)$

$$\varrho_0 = 16\,\frac{\delta^2}{l} \sim \frac{8\,(R - \sqrt{Rf})^2}{\sqrt{Rf}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16),$$

der daher nur von der Dicke abhängig und etwa doppelt so groß ist wie der eben berechnete Abstand des Poles von der Vorderkante, jedenfalls von derselben Größenordnung wie dieser Abstand. In Wirklichkeit hat die Joukowskysche Kurve am Vorderende eine stärkere Krümmung, so daß der Wert für ϱ_0 jenem Polabstande sich annähern wird. Benutzt man den Wert für die größte Dicke $d = 3\sqrt{3}\,\delta$, so wird man setzen können

$$\varrho_0 \sim \frac{16}{27}\,\frac{d^2}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16a).$$

Ist also ein Profil mit Joukowskyschem Charakter gegeben, dessen Tiefe $2l$ und dessen Dicke d ist, so kann man mit Hilfe der gegebenen Formeln die Lage des Poles B resp. den Krümmungsmittelpunkt des vorderen Scheitels innerhalb sehr enger Schranken festlegen.

3. Allgemeine Profile. Wenn die Konfiguration der drei Grundachsen (oder die Invarianten R, f, φ) gegeben ist, so gibt es eine unendliche Mannigfaltigkeit von Profilformen mit der Eigenschaft, daß eine im Unendlichen mit einer bestimmt gerichteten Geschwindigkeit q begabten zyklischen (Kutta-)Strömung auf sie gleiche, d. h. für jeden Anstellwinkel übereinstimmende, durch R, φ bestimmte Auftriebskräfte liefert, deren Wirkungslinien die durch den Brennpunkt F und die erste Achse durch M_0 als Leitlinie festgelegte Parabel umhüllen. Eindeutig bestimmt ist zunächst nur das Joukowskysche Profil. Man verlängert, um es zu finden, die erste Achse bis zum hinteren (links liegenden) Schnitt A' mit dem Kreise. Dann ist A' der Staupunkt der Kreisströmung, der sich in die Profilspitze transformiert. Die charakteristische Größe $\frac{l}{2}$ findet man, indem man $M_0 F$ bis C auf K_0 verlängert und über MC den Halbkreis zeichnet und auf MC in F die Senkrechte bis D auf dem Halbkreis. $M_0 D$ ist $= \frac{l}{2}$. Zieht man also AC und die Senkrechte im Abstande $M_0 D = \frac{l}{2}$ von A, so hat man das Achsenkreuz $\xi\eta$, auf das bezogen die Transformation

$$z = \zeta + \frac{l^2}{4\zeta}$$

den Kreis K_0 in das Joukowskysches Profil überführt (vergl. Abb. 6). Die Ableitung

$$\frac{dz}{d\zeta} = \left(1 + \frac{l}{2\zeta}\right)\left(1 - \frac{l}{2\zeta}\right)$$

gibt nun Anlaß zu einer von v. Mises [1]) herrührenden Verallgemeinerung, die einen gewissen systematischen Aufbau von Profilformen gestattet. Wir können nämlich statt der zwei Nullstellen beliebig viele $v_0\, v_1\, v_2 \ldots v_n$ einführen und für $\frac{dz}{d\zeta}$ die Entwicklung

$$\frac{dz}{d\zeta} = \left(1 - \frac{v_0}{\zeta}\right)\left(1 - \frac{v_1}{\zeta}\right) \ldots \left(1 - \frac{v_n}{\zeta}\right) \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

zugrunde legen. Unter den Nullstellen muß eine, v_0 mit dem Punkte A' auf dem Kreise K_0 zusammenfallen, die andern müssen innerhalb des Kreises liegen. Ferner muß, damit die Abbildungsfunktion

$$z = \int \left(1 - \frac{v_0}{\zeta}\right)\left(1 - \frac{v_1}{\zeta}\right) \ldots \left(1 - \frac{v_n}{\zeta}\right) d\zeta = \zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \ldots \quad \ldots \quad (18)$$

kein logarithmisches Glied enthält, die Bedingung

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

erfüllt sein, d. h. die geometrische Summe der Radienvektoren nach den Nullstellen muß verschwinden oder der Schwerpunkt des Systems der mit gleicher Masse (etwa $= 1$) belegt gedachten Punkte v muß in den Anfangspunkt fallen. Wir setzen weiter voraus, daß der Kreis, wie auf empirischem Wege festgestellt sein mag, in eine doppelpunktfreie Profilkurve übergeführt wird. Wenn dann der Anfangspunkt $\zeta = 0$ mit den Nullstellen v ins Innere des Kreises fällt, so wird nach einem Satz der Funktionentheorie [2]) die Abb. 2 im ganzen Außenraum des Kreises schlicht ausfallen, also geeignet sein, das Geschwindigkeitsfeld einer Profilströmung zu liefern.

Sind die Punkte v gegeben und der Radius des Grundkreises, so hat man zunächst in dem Schwerpunkt der v den Anfangspunkt. Um die möglichen Kreismittelpunkte zu ermitteln, stelle man dasjenige geradlinige und konvexe Polygon unter den Punkten v fest, das die andern nicht daran beteiligten Punkte im Innern enthält und beschreibe um die Polygonecken Kreise mit R_0. Wenn dadurch im Innern des Polygons ein konvexes Kreisbogenpolygon gleicher Seitenzahl entsteht, so gibt jeder Punkt auf einer Seite desselben eine mögliche Lage des Mittelpunktes M_0.

---

[1]) Vergl. v. Mises, Zur Theorie des Tragflächenauftriebes, Forts. der 2. Mitteilung, Zeitschr. f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt 1920, S. 87.

[2]) v. Mises, a. a. O.

Entwickelt man (18), so erhält man für die Koeffizienten der Reihe die Werte

$$\left.\begin{array}{c} -c_1 = \Sigma\, v_i v_k, \quad c_2 = {}^1\!/_2\, \Sigma\, v_i v_k v_l, \quad c_3 = -\,{}^1\!/_3\, \Sigma\, v_i v_k v_l v_m \\ \ldots \qquad (i,\,k,\,l,\,m \text{ verschieden}) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (19\text{a}).$$

Wenn v_0 eine einfache Null-Stelle ist, so wird der Hinterkantenwinkel des Tragflügels $= 0$. Wir können die so gewonnenen Profile als Spitzenprofile bezeichnen. Um zu einem Eckenprofile zu gelangen, muß man den Faktor $\left(1 - \frac{v_0}{\zeta}\right)$ in einer gewissen Potenz einführen, worauf wir noch zurückkommen werden. Zunächst beschränken wir uns auf den Fall, daß alle v voneinander verschieden sind. Um das Profil gleich in seiner natürlichen Lage zu erhalten, werden wir die x-Achse mit der zweiten Achse zusammenfallen lassen. Damit wird der Koeffizient c_1 reell und gleich dem Produkt aus dem Radius R_0 des Grundkreises und dem Brennpunktsabstand f vom Mittelpunkt M_0. Vielleicht dürfte es angebracht sein, für dieses Produkt die Bezeichnung »Potenz« des Profils einzuführen.

3a. Die Formengruppe $n = 2$. Denken wir uns wieder die Konfiguration der drei Achsen und den Punkt $A'(v_0)$ auf dem Kreise K_0 festgelegt, so ist im Falle $n = 2$ die Lage der beiden anderen Nullstellen v_1, v_2 von $\frac{dz}{d\zeta}$ bestimmt. Denn aus

$$Rf = v_0^2 - v_1 v_2, \qquad v_1 + v_2 = -v_0$$

ergibt sich, daß v_1 und v_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$v^2 + v v_0 + v_0^2 - Rf = 0$$

sind oder

$$v_{1,2} = -\frac{v_0}{2} \pm \sqrt{Rf - {}^3\!/_4\, v_0^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20).$$

Setzt man $v_0 = x_0 + i y_0$, $v = x + i y$ und trennt den reellen und imaginären Bestandteil der Gleichung, so ergeben sich v_1 und v_2 geometrisch als Schnittpunkte der beiden orthogonalen gleichseitigen Hyperbeln

$$\left(x + \frac{x_0}{2}\right)\left(y + \frac{y_0}{2}\right) = -\,{}^3\!/_4\, x_0 y_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21),$$

$$\left(x + \frac{x_0}{2}\right)^2 - \left(y + \frac{y_0}{2}\right)^2 = Rf - {}^3\!/_4\,(x_0^2 - y_0^2) \quad \ldots\ldots \quad (21\text{a}),$$

deren gemeinsamer Mittelpunkt die Koordinate $-\frac{v_0}{2}$ hat und deren Asymptoten den Achsen resp. deren Winkelhalbierenden parallel sind (Abb. 7). Wenn v_0 festliegt und Rf variiert (also etwa bei festem Grundkreis der Brennpunkt F sich der Kreisperipherie nähert), so beschreiben die Punkte $v_{1,2}$ die beiden Zweige der leicht zu konstruierenden Hyperbel (21). Jedem Werte von Rf entspricht eine Hyperbel (21a), welche auf der ersteren die Punkte v_1 und v_2 ausschneidet. Diese Beziehung gestattet, die gegenseitige Lage der v sehr klar zu übersehen. Wenn v_0 z. B. auf der reellen Achse ($v_0 = -a$) liegt, so fallen v_1, v_2 in den Schnittpunkt dieser Achse mit der Hyperbel

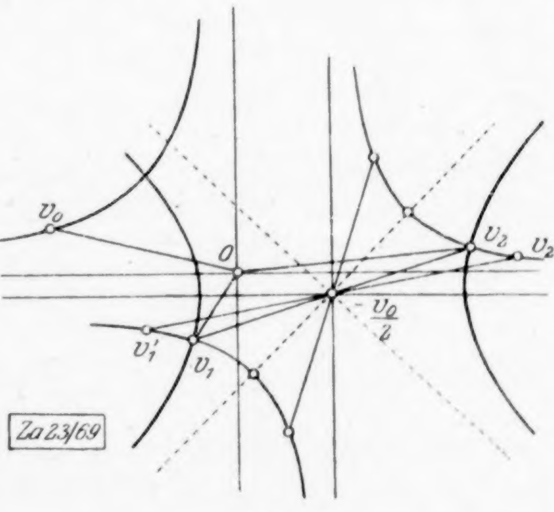


Abb. 7

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - y^2 = Rf - {}^3\!/_4\, a^2.$$

Bei veränderlichem Rf bilden $v_{1,2}$ eine Involution 2. Grades auf der x-Achse, deren Doppelpunkt $v_1 = v_2 = -\frac{a}{2}$ ist. Der Ausdruck für $\frac{dz}{d\zeta}$ lautet

$$\frac{dz}{d\zeta} = 1 - \frac{Rf}{\zeta^2} - \frac{v_0 v_1 v_2}{\zeta^3} = 1 - \frac{Rf}{\zeta^2} - \frac{v_0 (v_0^2 - Rf)}{\zeta^3}.$$

Den Koeffizienten der Entwicklung von z werden dann

$$c_1 = Rf, \quad c_2 = {}^1\!/_2\, v_0\,(v_0^2 - Rf)$$

und daher diese selbst

$$z = \zeta + \frac{Rf}{\zeta} - \frac{v_0 (Rf - v_0^2)}{2\,\zeta^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22).$$

Geht man von zwei Punkten $v_0 v_1$ aus, so lautet der Ausdruck für z

$$z = \zeta + \frac{v_0^2 + v_0 v_1 + v_1^2}{\zeta} - \frac{v_0 v_1 (v_0 + v_1)}{2\zeta^2} \quad \text{. . . . . . . (23).}$$

Wenn $v_0^2 = Rf$ wird, so haben wir den Joukowskyschen Fall. Der eine Punkt v_1 rückt in den Nullpunkt, während der andere $v_2 = -v_0$ die in bezug auf den Nullpunkt entgegengesetzte Lage von v_0 einnimmt.

Um die durch (22) bestimmte Profilkurve zu konstruieren, muß man zunächst den Kreis K_1 zeichnen, der aus K_0 durch die Transformation

$$\zeta_1 = \frac{Rf}{\zeta}$$

hervorgeht, und darauf graphisch die Summe $\zeta + \zeta_1$ ermitteln. Da die Potenz reell ist, so liegt der Mittelpunkt M_1 des Kreises K_1 auf der zu OM_0 in bezug auf die η-Achse spiegelbildlichen Geraden. Zur weiteren Festlegung von K_1 benutzt man etwa die Punkte ζ auf der reellen Achse. Die Konstruktion von $\zeta + \zeta_1$ kann bewirkt werden vermittelst Strahlen durch O im Winkelabstand 30°, deren erster mit der reellen Achse zusammenfällt. Das Korrekturglied $\zeta_2 = \frac{c_2}{\zeta^2}$ ist seinem Argument und seinem im allgemeinen klein ausfallenden absoluten Werte nach am besten rechnerisch festzustellen. Hat ζ das Argument φ und c_2, wie graphisch zu finden, das Argument ψ, so hat das Zusatzglied ζ_2 die Richtung $\psi - 2\varphi$ und den absoluten Wert $\left|\frac{c_2}{\zeta^2}\right|$.

In den beigegebenen Abbildungen 8 und 9 sind verschiedene Profilkurven nach diesem Verfahren aus dem Grundkreis (mit $R_0 = 5{,}6$) konstruiert. Um die Uebersicht zu erleichtern, stelle ich die verschiedenen Werte der Invarianten des Achsensystems (Rf, f, tg φ) sowie die Koordinaten der Punkte $v_0 v_1 v_2$ zunächst für den Fall $n = 2$ in einer Zahlentafel zusammen[1]).

Profil	Rf	f	tg φ	v_0	v_1	v_2
I	22,4	4	$^1/_5$	-4	5,22	$-1{,}22$
II	22,4	4	$^1/_5$	-5	4,35	0,65
III	22,4	4	$^1/_5$	$-5{,}46$	2,73	2,73
IV	22,4	4	$^1/_5$	$-5{,}66$	$2{,}83 + 1{,}26\,i$	$2{,}83 - 1{,}26\,i$
V	22,4	4	$^1/_5$	$-5 + \frac{i}{2}$	$4{,}6 + 0{,}6\,i$	$0{,}4 - 1{,}15\,i$
VI	22,4	4	$^1/$	$-5 + i$	$5{,}06 + i$	$-0{,}06 - 2\,i$
VII	24	4,3	$^1/_{10}$	$-4 + i$	$-1{,}58 - 1{,}32\,i$	$5.58 + 0{,}32\,i$
VIII	24	4,3	$^1/_{10}$	$-4 - i$	$-1{,}67 + 1{,}33\,i$	$5{,}67 - 0{,}33\,i$
IX	26	4,65	$^1/_5$	$-5 + \frac{i}{2}$	$-0{,}74 - 1{,}67\,i$	$4{,}26 + 1{,}17\,i$
X	26	4,65	$^1/_9$	$-4 + i$	$5{,}9 + 0{,}26\,i$	$-1{,}9 - 1{,}26\,i$
XI	24,8	4,5	$^1/_9$	$-4{,}5 + i$	$5{,}65 + 0{,}5\,i$	$-1{,}1 - 1{,}5\,i$

In den Zeichnungen ist die Lage des Mittelpunktes M_0, des Brennpunktes F und der Punkte v angegeben. In den Fällen I bis VI ist zunächst das Achsensystem (Rf, f, φ) festgehalten, um die Abhängigkeit der Form von der Lage des Bezugsystems in bezug auf v_0 zu verfolgen. Für die Profile VII und VIII mit gleicher Auftriebseigenschaft hat die Potenz Rf einen größeren Wert $= 24$. Die Koordinaten von v_0 in beiden Fällen sind konjugiert imaginär. Bei IX und X ist $Rf = 26$ gesetzt, das eine Mal ist tg $\varphi = {}^1/_5$, das andere Mal $= {}^1/_9$. Das letzte Profil XI bezieht sich auf den Fall, daß die ersten beiden Achsen parallel sind und daher die Auftriebsparabel (als Einhüllende der Auftriebslinien) zu einem Strahlenbüschel durch F ausartet.

3b. Formengruppe $n = 3$. Wir haben hier zu setzen

$$\frac{dz}{d\zeta} = \left(1 - \frac{v_0}{\zeta}\right)\left(1 - \frac{v_1}{\zeta}\right)\left(1 - \frac{v_2}{\zeta}\right)\left(1 - \frac{v_3}{\zeta}\right) = 1 + \frac{\Sigma\, v_i v_k}{\zeta^2} - \frac{\Sigma\, v_i v_k v_m}{\zeta^3} + \frac{v_0 v_1 v_2 v_3}{\zeta^4} \quad (24)$$

mit

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 = 0.$$

[1]) In der Originalzeichnung war die Einheit = 1 cm.

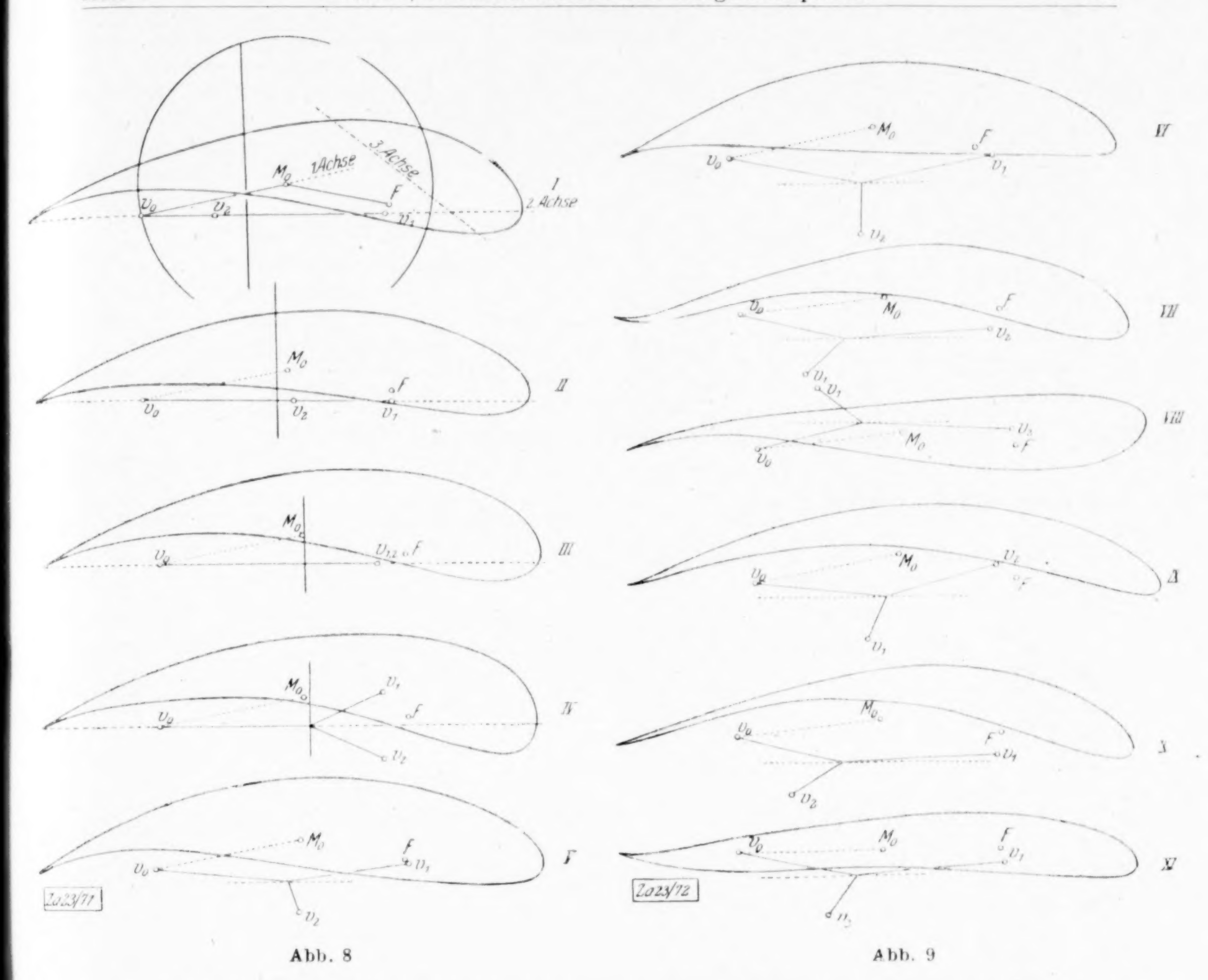


Abb. 8 Abb. 9

Bei vorgegebener Achsenkonfiguration und festgelegtem Koordinatensystem (reelle Achse parallel der 2. Profilachse) und gegebenem v_0 sind also die Punkte $v_1 v_2 v_3$ an die Bedingung gebunden

$$v_1 + v_2 + v_3 = - v_0, \quad v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3 = v_0^2 - Rf \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Als einfachsten geometrisch leicht zu übersehenden Fall setzen wir $v_1 = - v_0$, dann wird

$$v_2 + v_3 = 0, \quad v_2 v_3 = v_0^2 - Rf,$$

also

$$v_2 = - v_3 = \sqrt{Rf - v_0^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25a).$$

Die Punkte v sind die Eckpunkte eines Parallelogramms mit dem Anfangspunkt als Mittelpunkt. Setzt man wie oben $v_0 = x_0 + i y_0$, $v_2 = x_2 + i y_2$, so ergibt sich für diese Anordnung

$$x_2 y_2 = - x_0 y_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26),$$

$$x_2^2 - y_2^2 = Rf - (x_0^2 - y_0^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26a).$$

Liegt v_0 im 2. Quadranten, so verbindet die Diagonale $(v_2 v_3)$ des Parallelogramms der v den 1. und den 3. Quadranten, liegt v_0 im 3. Quadranten, so verbindet die Diagonale $v_2 v_3$ den 2. und 4. Quadranten. Genauer konstruiert man v_2 (resp. v_3) als Schnittpunkt der orthogonalen Hyperbeln (26) und (26a), deren Asymptoten mit den Koordinatenachsen resp. deren Winkelhalbierenden zusammenfallen. Für alle Punkte v_0, die auf derselben gleichseitigen Hyperbel mit den Achsen als Asymptoten liegen, beschreiben die Punkte v_2 und v_3 bei veränderlicher Potenz Rf dieselbe in bezug auf die reelle Achse spiegelbildliche Hyperbel (26) und werden auf dieser vom Büschel (26a) ausgeschnitten

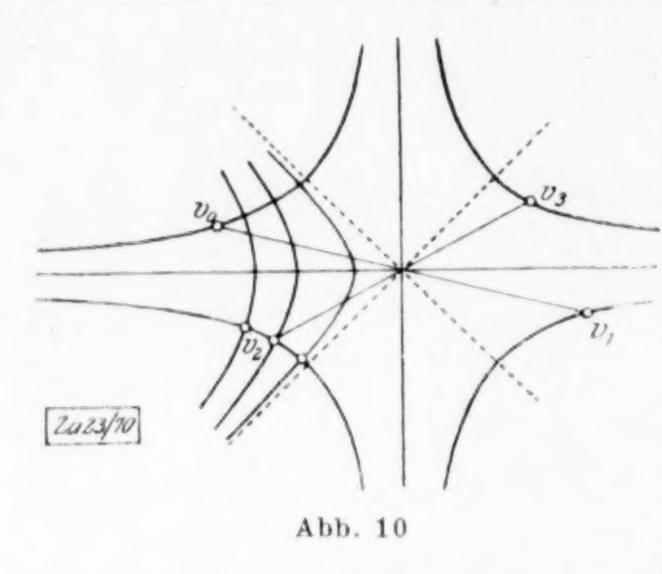


Abb. 10

(vergl. Abb. 10). Die Lage der Punkte kann noch genauer durch die Oktanten bezeichnet werden, die durch die Achsen und deren Halbierungslinien begrenzt sind. Liegt z. B. v_0 im 4. resp. 5. Oktanten, so liegen v_2 und v_3 im 1. und 5. (resp. 4. und 8.) oder im 2. und 6. (resp. 3. und 7.) Oktanten, je nachdem

$$Rf \gtrless x_0^2 - y_0^2.$$

Geht die ξ-Achse durch den Punkt A, so ist v_0 reell $= -a$, $v_1 = -a$. Die Hyperbel (26) geht in das Achsenpaar über und die Punkte $v_{2,3}$ werden auf diesen Achsen ausgeschnitten durch den Hyperbelbüschel (26a), liegen also auf der ξ-Achse oder der η-Achse, je nachdem $Rf \gtrless a^2$ ist.

Die Koeffizienten der Abbildungsfunktion erhalten die Werte

$$c_1 = Rf, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -\,{}^1/_3\, v_0^2 (Rf - v_0^2)$$

und diese selbst die Form

$$z = \zeta + \frac{Rf}{\zeta} - \frac{v_0^2 (Rf - v_0^2)}{3\,\zeta^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Wenn man von den Punkten v_0 und v_2 ausgeht, hat z die Form

$$z = \zeta + \frac{v_0^2 + v_2^2}{\zeta} - \frac{v_0^2\, v_2^2}{3\,\zeta^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27\text{a}).$$

Ist v_0 reell $= -a$ und liegen auch v_2 und v_3 auf der reellen Achse ($v_2 = -v_3 = -b$), so wird

$$z = \zeta + \frac{a^2 + b^2}{\zeta} - \frac{a^2 b^2}{3\,\zeta^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27\text{b})$$

oder mit $a = r\cos\chi$, $b = r\sin\chi$ ($r^2 = Rf$)

$$z = \zeta + \frac{r^2}{\zeta} - \frac{r^4 \sin^2 2\chi}{12\,\zeta^3}.$$

Liegen die Punkte v_2 und v_3 dagegen auf der imaginären Achse ($v = -v_3 = ib$), so wird

$$z = \zeta + \frac{a^2 - b^2}{\zeta} + \frac{a^2 b^2}{3\,\zeta^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27\text{c})$$

oder mit $a = r\,\mathfrak{Cof}\,\chi$, $b = r\,\mathfrak{Sin}\,\chi$

$$z = \zeta + \frac{r^2}{\zeta} + \frac{r^4\, \mathfrak{Sin}^2 2\chi}{12\,\zeta^3}.$$

Bei der Konstruktion des Profils handelt es sich, wie immer zunächst um die geometrische Ermittlung der Näherungskurve

$$z_1 = \zeta + \frac{Rf}{\zeta},$$

die dann durch Anfügung des Zusatzvektors $\frac{c_3}{\zeta^3}$ an die einzelnen Punkte in ein normales Profil mit verschwindendem Hinterkantenwinkel übergeführt wird. Hat c_3 das Argument ψ, ζ das Argument φ, so hat man die im allgemeinen klein ausfallende Größe $\left|\frac{c_3}{\zeta^3}\right|$ in der Richtung $\psi - 3\varphi$ von dem entsprechenden Punkte aus anzutragen. Schreitet man auf dem Grundkreis von 30^0 zu 30^0 fort, so dreht sich der Vektor des Zusatzgliedes im Uhrzeigersinne um jeweils 90^0.

Allgemein kann man alle Profile der Gruppe $n = 3$ bei gegebenem Auftriebsverlauf (resp. gegebener Achsenlage) durch Variation zweier Punkte v_0 und v_1 erhalten, von denen v_0 auf dem Kreise K_0, v_1 innerhalb des Kreises liegt. Denn der als fest anzunehmende Punkt A' bestimmt durch seine Koordinate und die gegebene Richtung der 2. Achse das Bezugssystem. Die Koordinaten v_2 und v_3 sind dann die Wurzeln der Gleichung

$$v^2 + v\,(v_0 + v_1) + v_0^2 + v_0\, v_1 + v_1^2 - Rf = 0,$$

woraus

$$v_{2,3} = -\frac{v_0 + v_1}{2} \pm \sqrt{Rf - {}^3/_4\,(v_0^2 + v_1^2) - {}^1/_2\, v_0 v_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Die Punkte v_2, v_3 liegen wieder auf zwei gleichseitigen Hyperbeln mit dem Mittelpunkt in $-\frac{v_0 + v_1}{2}$ und den Asymptoten parallel den Achsen resp. deren Winkelhalbierenden, von denen die eine von Rf abhängig, die andere davon unabhängig ist.

Die Koeffizienten c_2 und c_3 der Abbildungsfunktion haben die Werte

$$\left.\begin{aligned} c_2 &= {}^1/_2\,(v_0 + v_1)\,(v_0{}^2 + v_1{}^2 - Rf) \\ c_3 &= -\,{}^1/_3\,v_0\,v_1\,(v_0{}^2 + v_0 v_1 + v_1{}^2 - Rf) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (29).$$

In der nachfolgenden Tabelle haben wir für die in den Abbildungen 11, 12, 13 dargestellten Profile (XII bis XXIV) die Auftriebsvarianten und die Koordinaten der Punkte v zusammengestellt. Zur Erleichterung des Vergleiches wurde Rohrnatant = 5,6 gewählt.

Profil	Rf	tg φ	v_0	v_1	v_2	v_3
XII	26	$^1/_5$	-5	$+5$	1	-1
XIII	24	$^1/_5$	-5	$+5$	i	$-i$
XIV	21	$^1/_5$	-5	$+5$	$2i$	$-2i$
XV	24	$^1/_6$	$-4{,}6$	$4{,}6$	$1{,}6$	$-1{,}6$
XVI	24	$^1/_6$	$-5{,}1$	$+5{,}1$	$1{,}6\,i$	$-1{,}6\,i$
XVII	26	$^1/_{10}$	$-5+\frac{i}{2}$	$5-\frac{i}{2}$	$1{,}8+1{,}4\,i$	$-1{,}8-1{,}4\,i$
XVIII	26	$^1/_{10}$	$-5{,}1$	5.1	0	0
XIX	26	$^1/_{10}$	$-5-\frac{i}{2}$	$5+\frac{i}{2}$	$1{,}8-1{,}4\,i$	$-1{,}8+1{,}4\,i$
XX	24	$^1/_{10}$	$-5+\frac{i}{2}$	$5-\frac{i}{2}$	$1{,}45+1{,}7\,i$	$-1{,}45-1{,}7\,i$
XXI	24	$^1/_{10}$	$-5+i$	$5-i$	$3{,}16+3{,}16\,i$	$-3{,}16-3{,}16\,i$
XXII	26	$^1/_{10}$	$-5+\frac{i}{2}$	$i-1$	$5{,}7+0{,}75\,i$	$0{,}3-2{,}25\,i$
XXIII	23,7	$^1/_5$	$-5-\frac{i}{2}$	-2	$5-1{,}17\,i$	$2+1{,}67\,i$
XXIV	26	$^1/_5$	$-5-\frac{i}{2}$	$-2+2i$	$5{,}6+0{,}85\,i$	$1{,}38-2{,}35\,i$

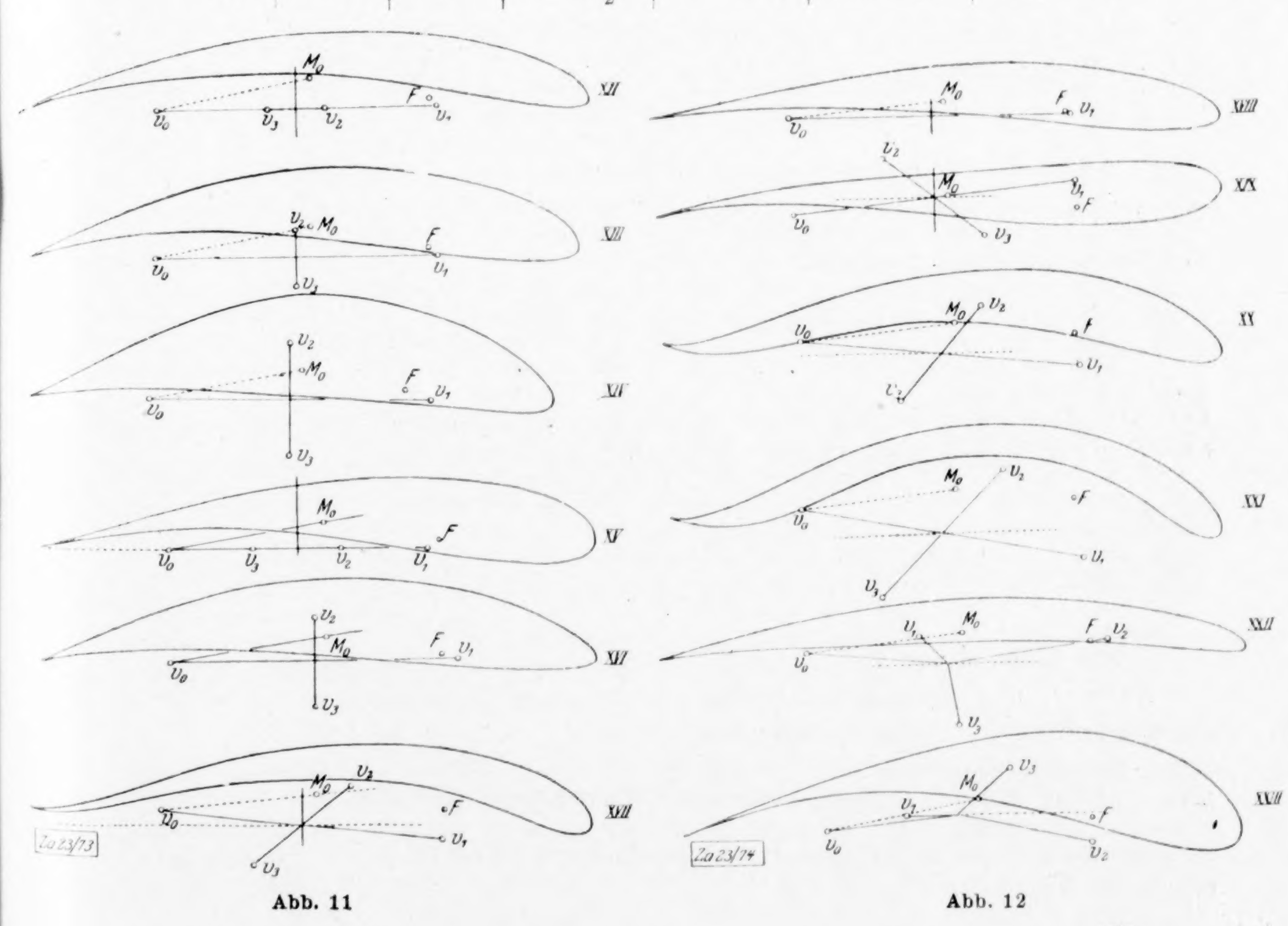


Abb. 11 Abb. 12

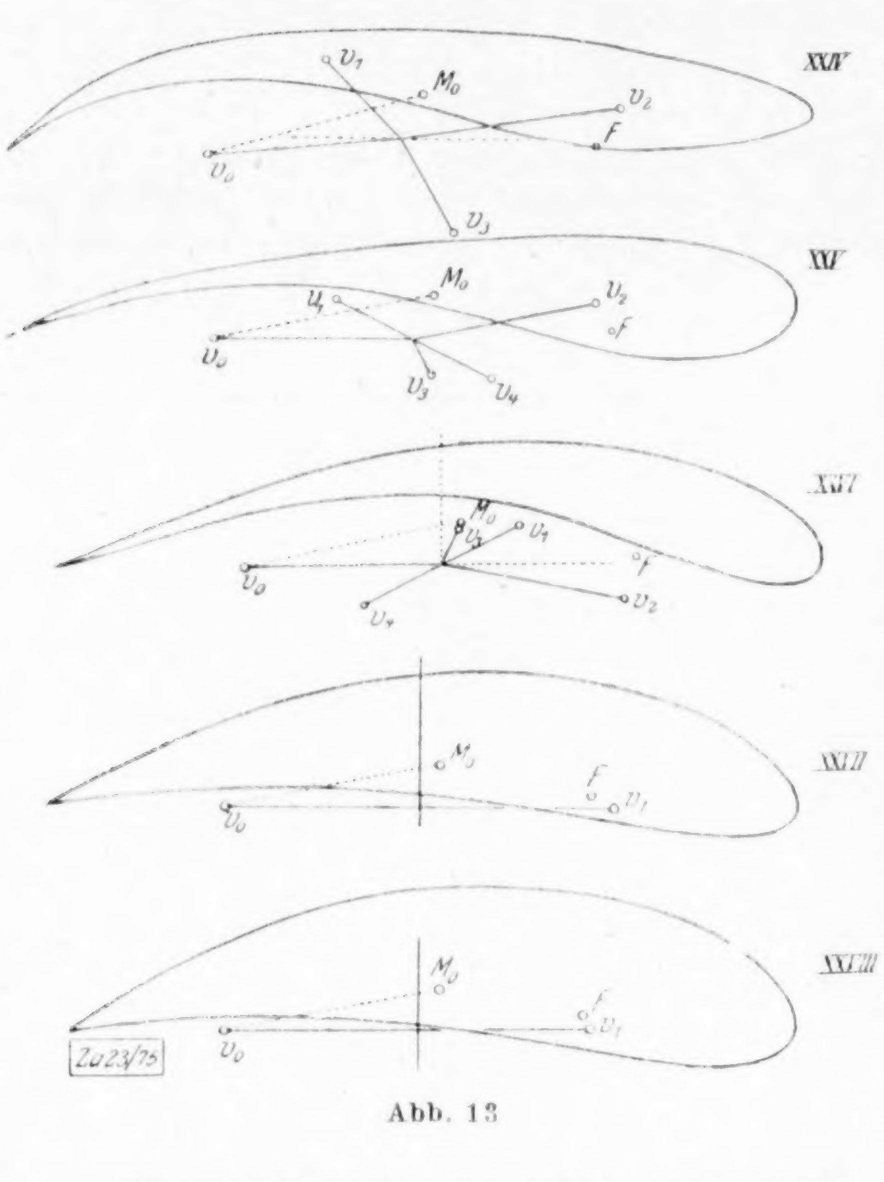


Abb. 13

Bei den ersten 3 Profilen kann man verfolgen, wie die Gestalt von der Lage der Punkte v_2 und v_3 auf der reellen und imaginären Achse abhängt, wenn v_0 festliegt. Für XV und XVI ist die Achsenkonfiguration festgehalten, während $v_{2,3}$ einmal auf der reellen, das andere Mal auf der imaginären Achse liegen. Die Folge XVII bis XIX zeigt weiter den Formenwechsel bei fester Profilachsenlage und einer Bewegung des Koordinatensystems senkrecht zur 2. Achse. XX und XXI sind zwei S-förmig gekrümmte Profile mit gemeinsamen Achsen. Die letzten drei Formen beziehen sich auf eine allgemeine Lage von v.

3c. Formengruppe $n = 4$. Wir beschränken uns auf die vereinfachende Annahme $v_1 = -v_4$. Sind dann die Punkte v_0 und v_1 den Bedingungen entsprechend festgelegt, so wird

$$\left.\begin{aligned} v_2 + v_3 &= -v_0 \\ v_2 v_3 &= v_0^2 + v_1^2 - Rf \end{aligned}\right\} \quad (30),$$

also

$$v_{2,3} = -\frac{v_0}{2} \pm \sqrt{Rf - {}^3/_4\, v_0^2 - v_1^2}.$$

Die Koeffizienten der Abbildungsfunktion, von der vorausgesetzt wird, daß sie den Kreis doppelpunktsfrei in eine Profilkurve überführt, werden

$$c_2 = {}^1/_2\, v_0 (v_0^2 + v_1^2 - Rf); \quad c_3 = \frac{v_1^2}{3}(v_1^2 - Rf); \quad c_4 = -\frac{v_0 v_1^2}{4}(v_0^2 + v_1^2 - Rf) \quad (31).$$

Wird $v_1^2 = Rf$, so haben wir die vereinfachte Form

$$z = \zeta + \frac{Rf}{\zeta} + \frac{v_0^3}{2\zeta^2} - \frac{v_0^3 v_1^2}{4\zeta^4}$$

und für v_2 und v_3 erhalten wir

$$v_{2,3} = -\frac{v_0}{2}(1 \pm i\sqrt{3}) = -v_0\, e^{\pm i \frac{\pi}{3}}.$$

Man hat also zur Konstruktion von v_2 und v_3 den Vektor $-v_0$ im positiven und negativen Sinne um 60^0 zu drehen. Da v_1 oder v_4 aber in die Nähe von v_0 und der Kreisperipherie rückt und die Punkte $v_0 v_2 v_3$ eine im allgemeinen sehr gespreizte Lage haben, so eignet sich diese Annahme wenig zur Profilkonstruktion.

Setzen wir $v_0^2 = Rf$, nehmen also v_0 auf der reellen Achse, so wird

$$v_{2,3} = -\frac{v_0}{2} \pm \sqrt{{}^1/_4\, v_0^2 - v_1^2}, \quad v_4 = -v_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

und die Abbildungsfunktion

$$z = \zeta + \frac{Rf}{\zeta} + \frac{v_0 v_1^2}{2\zeta^2} + \frac{v_1^2 (v_1^2 - v_0^2)}{3\zeta^3} - \frac{v_0 v_1^4}{4\zeta^4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33).$$

Wir haben in der Abb. 13 unter XXV und XXVI die beiden Fälle gezeichnet

$$Rf = 26, \quad \mathrm{tg}\, \varphi = {}^1/_5, \quad v_1 = -v_4 = 2 \pm i, \quad v_2 = 4{,}65 \mp 0{,}92\, i, \quad v_3 = 0{,}45 \pm 0{,}92\, i,$$

die sich gestaltlich wesentlich unterscheiden.

3d. Zusammenfassung. Wenn man die Profilgestalten überblickt, so bemerkt man zunächst, daß der eigentlich bestimmende Faktor für die Formgebung die Lage der Punkte v ist, sowohl in ihrer Gegenseitigkeit wie in bezug auf den zu transformierenden Grundkreis und die Bezugsachsen. Es ergeben sich dabei folgende unmittelbar verständliche Regeln.

1. Wenn die Punkte $v_2 v_3 \ldots$ um den Nullpunkt sich häufen, so neigt das Profil zur Joukowskyschen Form.

2. Die Abweichung von dem als »Normalform« anzusprechenden Joukowskyschen Profil hängt ab von dem gerichteten Abstand der Punkte vom Nullpunkt und den Polen.

3. Bewegt sich ein Punkt v vom Nullpunkt aus oder vom Pol $-v_0$ des Falles $n=1$ aus nahezu in Richtung der positiven oder negativen reellen Achse, so vermindert sich die Dicke resp. erhöht sich die Krümmung des Profils an dem Ende, nach dem der Radiusvektor des Punktes gerichtet ist, nach Maßgabe der Annäherung an die Kreisperipherie. Die entsprechende Lage (resp. Bewegung) auf der imaginären Achse wird die Querausdehnung in der Mittelregion erhöhen (I, III, VI, XII bis XVI).

4. Die Gesamtverdickung hat eine Erniedrigung der Potenz Rf resp. eine Vergrößerung von $R-f$ zur Folge, und umgekehrt kann man über die Dicke nach Wahl von Rf resp. f bei festem R beliebig verfügen.

5. Allgemein wird die Lage eines Punktes v für den Krümmungscharakter desjenigen Profilteiles bestimmend sein, der dem von den Achsen ξ und η begrenzten Kreisquadranten, in dem v liegt, durch die Abbildung zugewiesen ist, oder genauer für die Krümmung der Umgebung des Profilpunktes, der dem Endpunkt des Radiusvektors nach v auf dem Kreise entspricht.

Wenn also v im ersten Quadranten in der Gegend der Geraden $\xi-\eta=0$ liegt, so wird die vordere Rückenseite eine verstärkte Krümmung erhalten (XVII, XXIII), die im allgemeinen einen Wendepunkt hinter der Mitte oder jedenfalls eine Streckung des hinteren oberen Profilbogens zur Folge hat.

Wenn auch in den dritten Quadranten ein Punkt fällt, wozu wegen der Bedingung $\Sigma v = 0$ die Neigung vorhanden ist, so wird der hintere Teil des unteren Profilbogens eine Aufwärtskrümmung erhalten; überhaupt wird die Betonung einer mit $\xi-\eta=0$ verwandten Richtung in der Anordnung der Punkte v dem Profil eine Tendenz zur **S**-Form einprägen. Diese **S**-Form tritt besonders dann zutage, wenn v_0 im zweiten Quadranten liegt, wie sie umgekehrt dadurch aufgehoben erscheint, daß v_0 in den dritten Quadranten fällt. Liegt ein Punkt im zweiten Quadranten, so erfährt das Profil namentlich, wenn v_0 dem dritten Quadranten angehört, im hinteren Teil eine schroffere Abwärtskrümmung, die der Spitze einen schnabelartigen Charakter verleiht. Die Gegenlage von v im vierten Quadranten hat eine Ausbauchung auf der unteren Seite resp. eine Abflachung auf der Oberseite zur Folge.

Der bezeichnete Gegensatz tritt besonders deutlich in den Profilen VII und VIII, XVII und XIX zutage, bei denen für v_0 konjugiert komplexe Werte gewählt wurden. VII z. B. zeigt eine deutliche S-Krümmung, das Profil VIII dagegen gleichsam das umgekehrte Verhalten, d. h. die Kernlinie [1]) oder der Ort der Mittelpunkte aller das Profil von innen berührender Kreise hat im ersten Fall von oben gesehen vorne eine konvexe, hinten eine konkave, im letzten Falle umgekehrt vorne eine leichte konkave und hinten eine stärkere konvexe Krümmung. Etwas Aehnliches zeigen die Fälle XX, XXIV, XXV und XXVI.

Unmittelbar verständlich werden auf Grund dieser Regeln die andern dargestellten Formen, unter denen etwa die fischartigen Profile VI, XIV das nadelartige X und das schlangenförmig gewundene, etwa gleichmäßig dicke Profil XXI hervorzuheben sind.

6. Eine Aufwärtskrümmung an der Spitze des Profils hat eine Verkleinerung des Achsenwinkels φ zur Folge. Die Größe dieses Winkels kann immer nur durch Berücksichtigung beider Krümmungen, des überwiegenden nach oben gewölbten und des nach unten gekrümmten Teiles abgeschätzt werden, gleichsam als algebraische Summe beider entgegengesetzter Krümmungen.

Es wird auf Grund dieser Beziehungen möglich sein, für ein gegebenes Profil zu einer ungefähren Beurteilung der Lage der Punkte v im Kreise K_0 zu gelangen.

Für die Auftriebswirkung ergeben sich folgende allgemeine Regeln.

7. Verdickung in der Mitte und hinten einerseits und Erhöhung der Krümmung vorne andrerseits, wie Verjüngung nach hinten und Abrundung oder Abstumpfung vorne heben sich in ihrer Wirkung für den Auftrieb gegenseitig auf.

[1]) R. Knoller, Zur Festlegung einiger aerodynamischer Begriffe. Jahrb. d. wissensch. Gesellsch. f. Luftfahrt, 3. Bd., 1915, S. 103.

8. Ebenso muß eine Abflachung auf der vorderen Saugseite oder eine Aufblähung auf der vorderen Druckseite mit einer verstärkten Abwärtskrümmung an dem hinteren Ende sich verbinden, damit der Auftriebsverlauf ungeändert bleiben kann.

9. Dicke Profile haben, wenn man vom Widerstande absieht, im allgemeinen eine günstigere Auftriebswirkung als dünnere mit derselben Tiefenausdehnung, wie der Radius des Grundkreises gemäß den allgemeinen Extremalsätzen der Abbildungstheorie größer ausfällt [1]. Allerdings darf die Dicke eine gewisse Grenze, bei der der Widerstand oder die Wirbelbildung in erhöhtem Maße in Kraft tritt, nicht überschreiten.

10. Die Druckpunktswanderung wird vermindert
   a) durch Erhöhung der Dicke,
   b) durch Verkleinerung der Wölbung,
   c) durch Aufwärtskrümmung am Ende.

4. Allgemeine Eckenprofile. Um Eckenprofile allgemeiner Art zu erhalten, gehen wir aus von der früher benutzten Funktion

$$\frac{z+kl}{z-kl}=\left(\frac{\zeta+l}{\zeta-l}\right)^k \quad \text{oder} \quad \frac{x}{kl}=\frac{(\zeta+l)^k+(\zeta-l)^k}{(\zeta+l)^k+(\zeta-l)^k},$$

welche einen Kreis durch den Punkt $-l$ in ein Profil mit einer Ecke bei $-kl$ und den Eckenwinkel $\vartheta=\pi(2-k)$ überführt. Es ergibt sich nämlich die Ableitung

$$\frac{dz}{d\zeta}=\left(1+\frac{l}{\zeta}\right)^{k-1}\left(1-\frac{l}{\zeta}\right)^{k-1}\left[\frac{2kl}{(\zeta+l)^k-(\zeta-l)^k}\right]^2$$
$$=\left(1+\frac{l}{\zeta}\right)^{k-1}\left(1-\frac{l}{k}\right)^{k-1}\left(1-\frac{(k-1)(k-2)l^2}{3\zeta^2}+\ldots\right).$$

Allgemein wird man daher für den Fall einer Ecke den Ansatz [2])

$$\frac{dz}{d\zeta}=\left(1-\frac{v_0}{\zeta}\right)^{k-1}\left(1-\frac{v_1}{\zeta}\right)\ldots\left(1-\frac{v_n}{\zeta}\right) \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

machen dürfen, der durch die Beziehung zwischen dem Kreispunkt v_0 und den im Kreisinnern gelegenen Punkten $v_1 \ldots v_n$

$$(k-1)v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n=0 \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

zu ergänzen ist. Wenn man sich also den Punkt v_0 mit der Masse $k-1$, die andern Punkte v mit der Masse 1 belegt denkt, so muß der Gesamtschwerpunkt in den Anfangspunkt fallen.

Der einfachste Fall ist der zweier Nullstellen v_0 und v_1 von der Ordnung $k-1$ und 1, von denen v_0 wieder auf dem Kreise K_0 im Abstande $-l$ vom Nullpunkte liegen möge, v_1 ist dann bestimmt aus

$$v_1=l(k-1)$$

und es wird

$$\frac{dz}{d\zeta}=\left(1+\frac{l}{\zeta}\right)^{k-1}\left(1-\frac{l(k-1)}{\zeta}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36).$$

Aus der Theorie der Reihen ist bekannt, daß die zu $\left(1+\frac{l}{\zeta}\right)^{k-1}$ gehörige Binomialentwicklung für alle Punkte außerhalb K_0 und auf K_0, einschließlich der Stelle $\zeta=-l$ konvergiert, falls $k-1>0$ ist. Wir können also setzen

$$\frac{dz}{d\zeta}=1-\frac{k(k-1)l^2}{2\zeta^2}-\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 3}\frac{l^3}{\zeta^3}-\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1\cdot 2\cdot 4}\frac{l^4}{\zeta^4}-\ldots \quad . \ (36a)$$

und gewinnen durch gliedweises Integrieren

$$z=\zeta+\frac{k(k-1)l^2}{2\zeta}+\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{l^3}{\zeta^2}+\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{l^4}{\zeta^3}-\ldots \quad . \ (37).$$

Ist der Nullpunkt v_1 von der Ordnung $k-1$, so haben wir den dem Joukowskyschen entsprechenden Fall

$$\frac{dz}{d\zeta}=\left(1-\frac{v_0}{\zeta}\right)^{k-1}\left(1+\frac{v_0}{\zeta}\right)^{k-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38).$$

[1]) Vergl. Fuchs-Hopf, Aerodynamik, Berlin 1922, S. 201 f.

[2]) Vergl. v. Mises, Zeitschr. f. Flugt. u. Motorl. 1920, S. 87; Fuchs-Hopf, Aerodynamik, 1922, S. 57; R. Grammel, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges, Braunschweig 1917, S. 20.

Die Binomialentwicklung beider Faktoren ist für alle Punkte auf dem Kreise und außerhalb des Kreises konvergent. Wir haben dann

$$\frac{dz}{d\zeta} = 1 - \frac{(k-1)\,l^2}{\zeta^2} + \frac{(k-1)(k-2)\,l^4}{2\,\zeta^4} - \ldots \ldots \quad (38a)$$

und

$$z = \zeta + \frac{(k-1)\,l^2}{\zeta} - \frac{(k-1)(k-2)\,l^4}{6\,\zeta^3} + \frac{(k-1)(k-2)(k-3)\,l^6}{30\,\zeta^5} - \ldots \quad (39).$$

Vergleicht man die drei durch die Abbildungsfunktionen (9), (37) und (39) aus demselben Kreise K_0 mit derselben Lage von v_0 gewonnenen Profilformen, so sieht man, daß Rf im zweiten Fall den kleinsten Wert $(^1/_2\,k(k-1)l^2)$, im dritten Fall den größten Wert $((k-1)l^2)$ hat. Das erstere Profil wird also die größte Dicke zeigen und das Trefftz-Kármánsche Eckenprofil wird in der Formgebung eine Mittelstelle einnehmen.

Wir haben unter XXVI, XXVII der Abb. 13 die beiden extremen Fälle für folgende Werte der Invarianten

$$R = 5{,}6,\quad l = 5,\quad \operatorname{tg}\varphi = {}^1/_5,\quad k = 1{,}88,\quad \vartheta\ (\text{Eckenwinkel}) = 24^0$$

gezeichnet. Auf weitere Einzelheiten müssen wir in diesem Zusammenhang verzichten.

231

Der biegungsfeste Stabzug über n Öffnungen.

Von **JOHN BERLOWITZ** in Woosung (China).[1])

Es besteht in der Berechnung der statisch unbestimmten Systeme seit langem der Wunsch, zu normalisieren, d. h. nicht jeden einzelnen Fall als Spezialfall zu behandeln und mit dem Aufstellen der Elastizitätsgleichungen zu beginnen, sondern Normal-Elastizitätsgleichungen aufzustellen, die eine möglichst große Zahl von Spezialfällen umfaßt. Das ist im weitgehendsten Maße H. Bleich mit der Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentsatzes gelungen. Jedoch geht diese Methode recht weit. Das Einsetzen der statisch unbestimmten Größen und das endgültige Aufstellen der Elastizitätsgleichungen erfordert Uebung und noch recht reichliche Gedankenarbeit, bei mangelnder Uebersicht und ungeschickter Wahl der statisch unbestimmten Größen können auch die Bleichschen Gleichungen noch recht verwickelt werden. Beschränkt man sich auf eine etwas weniger allgemein gültige Grundlage, nämlich den biegungsfesten Stabzug über n Oeffnungen, der eine recht große Zahl statisch unbestimmter Systeme umfaßt, so kann man für diesen nach der alten Methode, d. h. bei vorherigem Einsetzen der statisch unbestimmten Größen, allgemein gültige Gleichungen aufstellen, die für die praktische Anwendung mundgerechter sind als die Bleichschen Gleichungen. Das Aufstellen dieser Gleichungen und die Erklärung ihrer Anwendungen ist der Zweck der vorliegenden Arbeit.

1. Hauptsystem und statisch unbestimmte Größen. Es werde der in Abb. 1 skizzierte biegungsfeste Stabzug über n Oeffnungen betrachtet. Er hat $n+1$ eingespannte Auflager und ist daher $3n$-fach statisch unbestimmt. Als statisch unbestimmte Größen werden eingeführt: der Horizontalschub jeder einzelnen Oeffnung und die beiden Stützeneinspannungsmomente jeder einzelnen Oeffnung. Unter Horizontalschub sind dabei 2 gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte verstanden, die in der Verbindungslinie zweier benachbarter Auflager angreifen. An jeder Zwischenstütze greifen zwei statisch unbestimmte Größen an, nämlich das Einspannungsmoment rechts der linken Oeffnung und das Einspannungsmoment links der rechten Oeffnung. Das statisch bestimmte Hauptsystem besteht demnach aus einer Reihe statisch bestimmter biegungsfester Stabzüge. Das statisch bestimmte Hauptsystem und die statisch unbestimmten Größen zeigt Abb. 2.

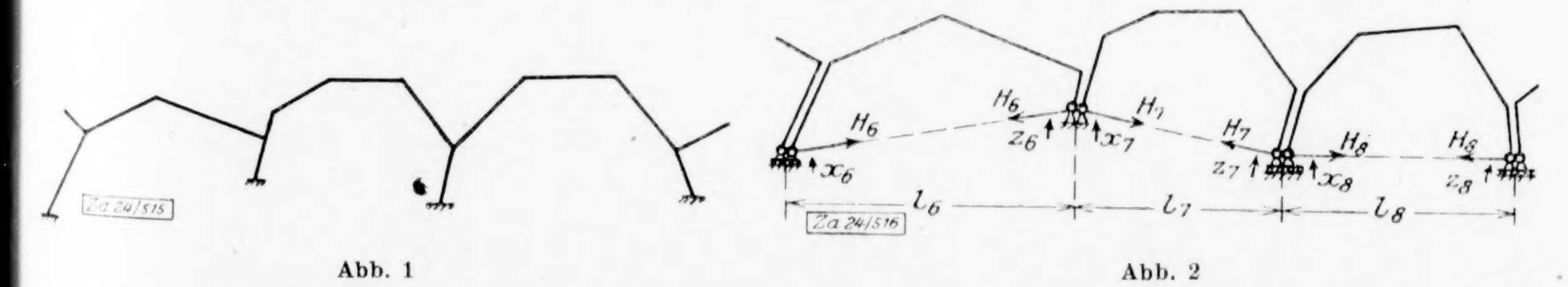


Abb. 1 Abb. 2

[1]) Auszug aus der von der Techn Hochschule Danzig genehmigten Dr.-Ing.-Dissertation des Verfassers. Referenten Prof. Kohnke und Dr. Doeinck.

Als irgend eine beliebige Oeffnung mit der Ordnungsziffer m ist dabei des einfacheren Schreibens wegen die 7-te Oeffnung herausgegriffen worden. Es werde vorausgesetzt, daß das Trägheitsmoment in jedem einzelnen Stabe konstant sei, ferner daß die Formänderungsarbeit der Normalkräfte vernachlässigt werden kann. Die statisch unbestimmten Größen $H = -1$, $X = -1$, $Z = -1$ mögen in den Stäben die Momente M_H, M_X, M_Z erzeugen. Läßt man zunächst Stützenverschiebungen und Temperaturbeanspruchungen außer Acht, so lauten die drei Gruppenelastizitätsgleichungen:

$$\int M_H \cdot d\varphi = 0, \qquad \int M_X \cdot d\varphi = 0, \qquad \int M_Z \cdot d\varphi = 0, \qquad d\varphi = \frac{M \cdot ds}{E J} \quad (1).$$

Von jeder dieser Gruppen lassen sich je n-Gleichungen aufstellen, so daß insgesamt $3n$-Gleichungen vorhanden sind. Für die 7-te Oeffnung lauten daher die drei Gleichungen:

$$\int M_{H7} \cdot d\varphi = 0, \qquad \int M_{X7} \cdot d\varphi = 0, \qquad \int M_{Z7} \cdot d\varphi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Es genügt, diese 3 Gleichungen abzuleiten, da sich alle übrigen Gleichungen nur durch die Zeiger unterscheiden und durch cyklische Vertauschung der Zeiger aus diesen 3 Gruppengleichungen sofort hingeschrieben werden können. In den Gleichungen (2) erstrecken sich zunächst theoretisch die Integrale über die Stäbe aller Oeffnungen, da aber M_{H7}, M_{X7}, M_{Z7} nur für die Stäbe der 7-ten Oeffnung Werte besitzen, während sie für alle übrigen Stäbe gleich 0 werden, erstrecken sich die Integrale der Gleichungen (2) nur über die Stäbe der 7-Oeffnung.

Die Horizontalschübe H werden als Zugkräfte angenommen, die Momente X und Z als positive Momente für ihre zugehörigen Oeffnungen. Unter positivem Moment sind dabei die Momente verstanden, die auf der Innenseite jeder Oeffnung Zug- und auf der Außenseite Druckspannungen hervorrufen. Im ersten Stab der 7-ten Oeffnung z. B. erzeugen demnach X_7 und H_6 positive Momente, H_7 und Z_6 dagegen negative Momente. Wird derselbe Stab jedoch als letzter Stab der sechsten Oeffnung betrachtet, so sind die Vorzeichen umzukehren.

2. Ableitung von Elastizitätsgleichungen. Es werde die 7-te Oeffnung auf ein rechtwinkliges Achsensystem bezogen und die Bezeichnung eingeführt, wie sie Abb. 3 zeigt. Die Strecken a, b und h sind im Sinne dieses Achsensystems mit Vorzeichen zu versehen. Dann gelten für den Neigungswinkel des m-ten Stabes, wie auch immer der Stab geneigt sein möge, die Gleichungen:

$$\sin \alpha_{7,m} = \frac{h_{7,m} - h_{7,m-1}}{s_{7,m}}, \qquad \cos \alpha_{7,m} = \frac{a_{7,m} - a_{7,m-1}}{s_{7,m}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und, da

$$a_{7,m} + b_{7,m} = a_{7,m-1} + b_{7,m-1} = l_7,$$

$$\cos \alpha_{7,m} = \frac{b_{7,m-1} - b_{7,m}}{s_{7,m}}, \qquad \text{ferner} \qquad \operatorname{tg} \varphi_7 = \frac{h_{7,n} - h_{7,0}}{l_7}$$

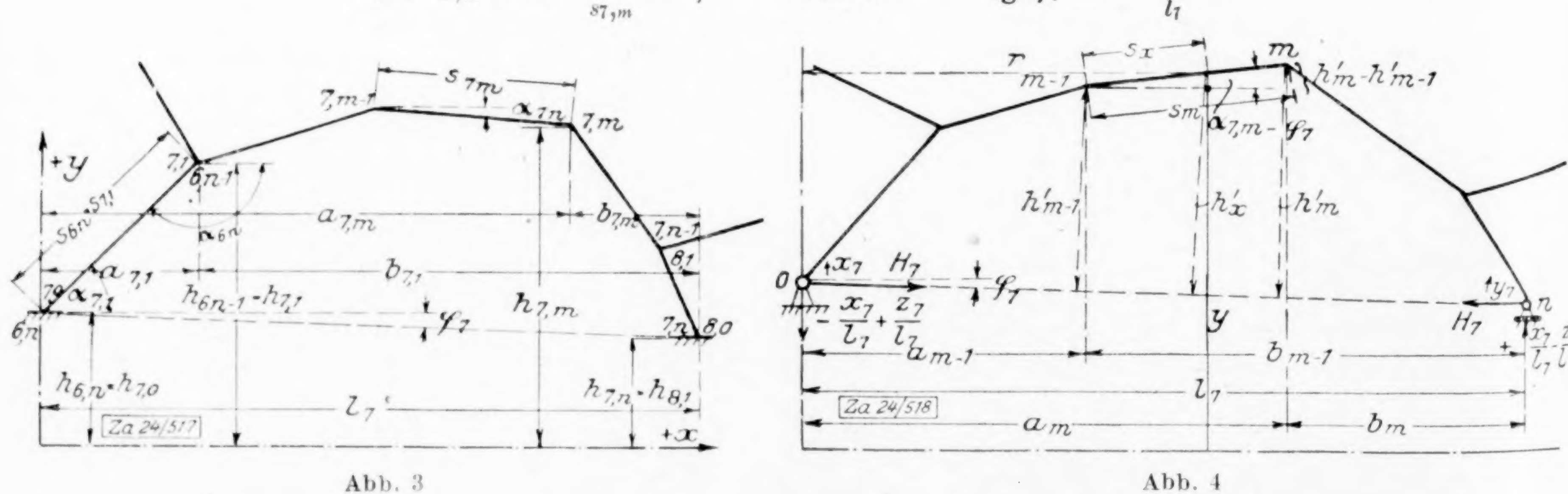


Abb. 3 Abb. 4

Für den Stab der 7. Oeffnung ist für den Punkt x, y mit den Bezeichnungen der Abb. 4:

$$M = M^0_{7,m} - H_7 \cdot h'_x + X_7 \left(1 + \frac{x}{l_7}\right) + Z_7 \cdot \frac{x}{l_7} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$h'_x = h'_{m-1} + s_x \cdot \sin(\alpha_{7,m} - \varphi_7), \qquad x = a_{m-1} + s_x \cdot \cos \alpha_{7,m}, \qquad l - x = b_{m-1} - s_x \cdot \cos \alpha_{7,m}$$

$$M_{H7} = +1 \cdot [h'_{7,m-1} + s_x \cdot \sin(\alpha_{7,m} - \varphi_7)],$$

$$M_{X7} = -1 \cdot \frac{b_{m-1} - s_x \cdot \cos \alpha_{7,m}}{l_7}, \qquad M_{Z7} = -1 \cdot \frac{a_{m-1} + s_x \cdot \cos \alpha_{7,m}}{l_7}$$

Gemäß Gl. (2) ist daher für Stab $7,m$

$$\int M_{H7}\, d\varphi = \frac{S_{7,m}}{E \cdot J_{7,m}} - \frac{s_{7,m}}{6\, E \cdot J_{7,m}} \cdot \Big\{ 2\, H_7 \left(h'^{\,2}_{m-1} + h'_{m-1} \cdot h'_m + h'^{\,2}_m\right)$$
$$- \frac{X_7}{l_7} \left[h'_{m-1} \left(2\, b_{m-1} + b_m\right) + h'_m \left(b_{m-1} + 2\, b_m\right)\right]$$
$$- \frac{Z_7}{l_7} \left[h'_{m-1} \left(2\, a_{m-1} + a_m\right) + h'_m \left(a_{m-1} + 2\, a_m\right)\right]\Big\} \quad (5\,\mathrm{a}),$$

$$\int M_{X7}\, d\varphi = - \frac{R_{7,m}}{E \cdot J_{7,m} \cdot l_7} + \frac{s_{7,m}}{6\, E \cdot J_{7,m} \cdot l_7} \Big\{ H_7 \left[b_{m-1} \left(2\, h'_{m-1} + h'_m\right) + b_m \left(h'_{m-1} + 2\, h'_m\right)\right]$$
$$- \frac{2\, X_7}{l_7} \left(b^2_{m-1} + b_{m-1} \cdot b_m + b^2_m\right)$$
$$- \frac{Z_7}{l^7} \left[b_{m-1} \left(2\, a_{m-1} + a_m\right) + b_m \left(a_{m-1} + 2\, a_m\right)\right]\Big\} \quad (5\,\mathrm{b}),$$

$$\int M_{Z7} \cdot d\varphi = - \frac{L_{7,m}}{E \cdot J_{7,m} \cdot l_7} + \frac{s_{7,m}}{6\, E \cdot J_{7,m} \cdot l_7} \Big\{ H_7 \cdot \left[a_{m-1} \left(2\, h'_{m-1} + h'_m\right) + a_m \left(h'_{m-1} + 2\, h'_m\right)\right]$$
$$- \frac{X_7}{l_7} \left[a_{m-1} \left(2\, b_{m-1} + b_m\right) + a_m \left(b_{m-1} + 2\, b_m\right)\right]$$
$$- \frac{2\, Z_7}{l_7} \left(a^2_{m-1} + a_{m-1} \cdot a_m + a^2_m\right)\Big\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5\,\mathrm{c}).$$

Darin bedeuten:

$S_{7,m}$ = stat. Moment der M^0-Fläche um Kämpferverbindungslinie als Achse,
$R_{7,m}$ = » » » » » » rechte Auflagersenkrechte als Achse,
$L_{7,m}$ = » » » » » » linke » » »

Erstreckt man die Integrale nicht nur über den m-ten Stab, sondern über alle Stäbe der 7-ten Oeffnung, so ist vor jeden einzelnen Summanden $\sum\limits_{7,0}^{7,n}$ vorzusetzen. Die so erhaltenen Gruppengleichungen sind jedoch noch nicht vollständig, denn Stab 7,1 ist gleichzeitig Stab $6,n$ und Stab $7,n$ ist gleichzeitig Stab 8,1, für die Gl. (4) nicht vollständig ist. Für Punkt x, y des Stabes 7,1 ist nach Abb. 5:

$$M = M^0 + H_6 \cdot h'_6 - H_7\, h'_7 + X_6 \cdot \frac{x}{l_6} - Z_6 \cdot \left(1 + \frac{x}{l_6}\right) + X_7 \cdot \left(1 - \frac{x}{l_7}\right) + Z_7 \cdot \frac{x}{l_7}$$

Ist der Stab 7,1 nach links geneigt, so ist x mit negativem Vorzeichen einzusetzen.

$$x = s_x \cos \alpha_{7,1}\,, \qquad h'_6 = \sin\left(\alpha_{6,n} + \varphi_6\right) \cdot s_x\,, \qquad h'_7 = \sin\left(\alpha_{7,1} - \varphi_7\right) \cdot s_x\,.$$

Entsprechendes gilt für Stab $7,n$.

Damit lauten die vervollständigten 3 Gruppengleichungen für die 7-te Oeffnung:

$$0 = \int M_{H7}\, d\varphi = \sum_{7,0}^{7,n} \frac{S_m}{E\, J_m} + \frac{s_{7,1}\, h'_{7,1}}{6\, E\, J_{7,1}} \left[2\, H_6\, h'_{6,n-1} - 2\, X_6\, \frac{b_{6,n-1}}{l_6} - Z_6\, \frac{l_6 + 2\, a_{6,n-1}}{l_6}\right]$$
$$- H_7 \sum_{7,0}^{7,n} \frac{s_m}{3\, E\, J_m} \left(h'^{\,2}_{m-1} + h'_{m-1}\, h'_m + h'^{\,2}_m\right)$$
$$+ X_7 \sum_{7,0}^{7,n} \frac{s_m}{6\, E\, J_m} \left[h'_{m-1} \left(2\, b_{m-1} + b_m\right) + h'_m \left(b_{m-1} + 2\, b_m\right)\right]$$
$$+ Z_7 \sum_{7,0}^{7,n} \frac{s_m}{6\, E\, J_m} \left[h'_{m-1} \left(2\, a_{m-1} + a_m\right) + h'_m \left(a_{m-1} + 2\, a_m\right)\right]$$
$$+ \frac{s_{7,n}\, h'_{7,n-1}}{6\, E\, J_{7,n}} \left[2\, H_8\, h'_{8,1} - X_8\, \frac{l_8 + 2\, b_{8,1}}{l_8} - 2\, Z_8\, \frac{a_{8,1}}{l_8}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (6\,\mathrm{a}),$$

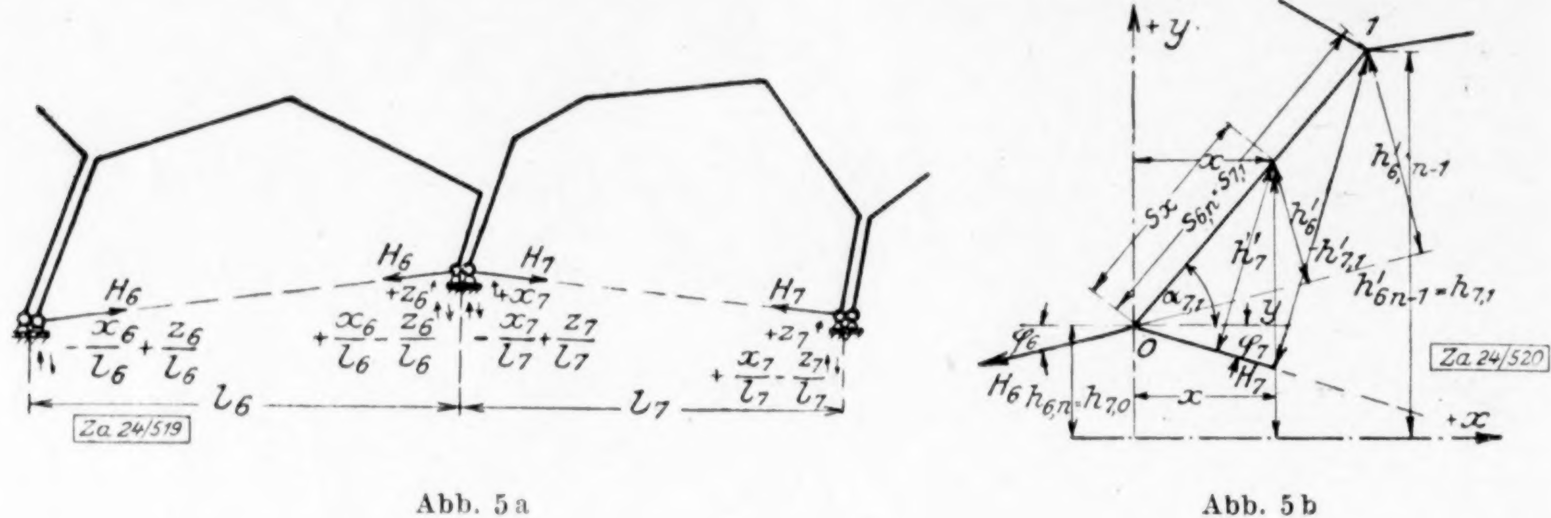


Abb. 5a Abb. 5b

$$0 = \int \boldsymbol{M}_{x7}\, d\varphi = \sum_{7,0}^{7,n}{}' \frac{R_m}{E\, J_m\, l_7} + \frac{s_{7,1}}{6\, E\, J_{7,1}\, l_7} \Big[- H_6\, h'_{6,n-1} (l_7 + 2\, b_{7,1})$$

$$+ \frac{b_{6,n-1}}{l_6} (l_7 + 2\, b_{7,1}) (X_6 - Z_6) + 3\, Z_6\, (l_7 + b_{7,1}) \Big]$$

$$+ H_7 \sum_{7,0}^{7,n}{}' \frac{s_m}{6\, E\, J_m\, l_7} [b_{m-1}\, (2\, h'_{m-1} + h'_m) + b_m\, (h'_{m-1} + 2\, h'_m)]$$

$$- X_7 \sum_{7,0}^{7,n}{}' \frac{s_m}{3\, E\, J_m\, l_7} (b_{m-1}{}^2 + b_{m-1}\, b_m + b_m{}^2)$$

$$- Z_7 \sum_{7,0}^{7,n}{}' \frac{s_m}{6\, E\, J_m\, l_7} [b_{m-1}\, (2\, a_{m-1} + a_m) + b_m\, (a_{m-1} + 2\, a_m)]$$

$$+ \frac{s_{7,n}}{6\, E\, J_{7,n}\, l_7} \Big[- H_8\, h'_{8;n-1} + 3\, X_8 - \frac{2\, a_{8,1}}{l_8} (X_8 - Z_8) \Big] \qquad (6\,\text{b}),$$

$$0 = \int \boldsymbol{M}_{z7}\, d\varphi = \sum_{7,0}^{7,n}{}' \frac{L_m}{E\, J_m\, l_7} + \frac{s_{7,1}\, a_{7,1}}{6\, E\, J_{7,1}\, l_7} \Big[- H_6\, h'_{6,n-1} + \frac{2\, b_{6,n-1}}{l_6} (X_6 - Z_6) + 2\, Z_6 \Big]$$

$$+ H_7 \sum_{7,0}^{7,n}{}' \frac{s_m}{6\, E\, J_m\, l_7} [a_{m-1}\, (2\, h'_{m-1} + h'_m) + a_m\, (h'_{m-1} + 2\, h'_m)]$$

$$- X_7 \sum_{7,0}^{7,n}{}' \frac{s_m}{6\, E\, J_m\, l_7} [a_{m-1}\, (2\, b_{m-1} + b_m) + a_m\, (b_{m-1} + 2\, b_m)]$$

$$- Z_7 \sum_{7,0}^{7,n}{}' \frac{s_m}{3\, E\, J_m\, l_7} (a_{m-1}{}^2 + a_{m-1}\, a_m + a_m{}^2)$$

$$+ \frac{s_{7,n}}{6\, E\, J_{7,n}\, l_7} \Big[- H_8\, h'_{8,1}\, (l_7 + 2\, a_{7,n-1}) + 3\, X_8\, (l_7 + a_{7,n-1})$$

$$- \frac{a_{8,1}}{l_8} (l_7 + 2\, a_{7,n-1}) (X_8 - Z_8) \Big] \qquad (6\,\text{a}).$$

Nach diesen drei Gruppengleichungen (6) **kann bereits jeder beliebig gestaltete und beliebig belastete steife Rahmen von 1 bis n-Oeffnungen berechnet werden.** Die statisch unbestimmten Größen sind so gewählt, daß Gruppengleichungen (6b) und (6c) spiegelbildlich gleich sind, so daß man bei symmetrischen Konstruktionen nur eine dieser Gruppen auszurechnen hat. Die statisch unbestimmten Größen sind ferner so gewählt, daß Abänderungen der Auflagerung, also anstatt der eingespannten Lagerung gelenkartige oder Pendelstützenlagerung leicht berücksichtigt werden können und diese Gleichungen auch für derart gelagerte Konstruktionen gelten, wie nachher noch näher gezeigt werden soll.

3. Umformung der Gleichungen. Zunächst sollen noch einige Abkürzungen eingeführt werden. Erweitert man Gl. (6a) mit $\frac{6\, E\, Jc}{h\, c^2}$ und Gl. (6b) und (6c) mit $-\frac{6\, E\, Jc}{h\, c}$ und setzt:

$$6\, \frac{S_m}{h\, c^2} \frac{J\, c}{J_m} = S_m', \quad \frac{6\, R_m}{l\, h\, c} \frac{J\, c}{J_m} = R_m', \quad \frac{6\, L_m}{l\, h\, c} \frac{J\, c}{J_m} = L_m', \quad \frac{s_m}{h\, c} \frac{J\, c}{J_m} = \varphi_m, \quad \frac{a_{m-1}}{l} = \alpha_{m-1},$$

$$\frac{a_m}{l} = \alpha_m, \quad \frac{b_{m-1}}{l} = \beta_{m-1}, \quad \frac{b_m}{l} = \beta_m, \quad \frac{h_{m-1}}{h\, c} = \gamma_{m-1}, \quad \frac{h_m}{h\, c} = \gamma_m \quad \text{und} \quad H\, h\, c = Y,$$

so lauten die drei Gruppen-Elastizitätsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
0 = \sum_{7,0}^{7,n} S_m' &+ \varphi_{7,1}\,\gamma_{7,1}\,[2\,Y_6\,\gamma_{6,n-1} - 2\,X_6\,\beta_{6,n-1} - Z_6\,(1 + 2\,\alpha_{6,n-1})] \\
&- 2\,Y_7 \sum_{7,0}^{7,n} \varphi_m\,(\gamma_{m-1}^2 + \gamma_{m-1}\,\gamma_m + \gamma_m^2) \\
&+ X_7 \sum_{7,0}^{7,n} \varphi_m\,[\gamma_{m-1}\,(2\,\beta_{m-1} + \beta_m) + \gamma_m\,(\beta_{m-1} + 2\,\beta_m)] \\
&+ Z_7 \sum_{7,0}^{7,n} \varphi_m\,[\gamma_{m-1}\,(2\,\alpha_{m-1} + \alpha_m) + \gamma_m\,(\alpha_{m-1} + 2\,\alpha_m)] \\
&+ \varphi_{7,n}\,\gamma_{7,n-1}\,[2\,Y_8\,\gamma_{8,1} - X_8\,(1 + 2\,\beta_{8,1}) - 2\,Z_8\,\alpha_{8,1}] \quad \ldots \ldots \quad (7\,\mathrm{a}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = \sum_{7,0}^{7,n} R_m' &+ \varphi_{7,1}\,[Y_6\,\gamma_{6,n-1}\,(1 + 2\,\beta_{7,1}) - \beta_{6,n-1}\,(1 + 2\,\beta_{7,1})\,(X_6 - Z_6) - 3\,Z_6\,(1 + \beta_{7,1})] \\
&- Y_7 \sum_{7,0}^{7,n} \varphi_m\,[\beta_{m-1}\,(2\,\gamma_{m-1} + \gamma_m) + \beta_m\,(\gamma_{m-1} + 2\,\gamma_m)] \\
&+ 2\,X_7 \sum_{7,0}^{7,n} \varphi_m\,(\beta_{m-1}^2 + \beta_{m-1}\,\beta_m + \beta_m^2) \\
&+ Z_7 \sum_{7,0}^{7,n} \varphi_m\,[\beta_{m-1}\,(2\,\alpha_{m-1} + \alpha_m) + \beta_m\,(\alpha_{m-1} + 2\,\alpha_m)] \\
&+ \varphi_{7,n}\,\beta_{7,n-1}\,[Y_8\,\gamma_{8,1} - 3\,X_8 + 2\,\alpha_{8,1}\,(X_8 - Z_8)] \quad \ldots \ldots \quad (7\,\mathrm{b}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = \sum_{7,0}^{7,n} L_m' &+ \varphi_{7,1}\,\gamma_{7,1}\,[Y_6\,\gamma_{6,n-1} - 2\,\beta_{6,n-1}\,(X_6 - Z_6) - 3\,Z_6] \\
&- Y_7 \sum_{7,0}^{7,n} \varphi_m\,[\alpha_{m-1}\,(2\,\gamma_{m-1} + \gamma_m) + \alpha_m\,(\gamma_{m-1} + 2\,\gamma_m)] \\
&+ X_7 \sum_{7,0}^{7,n} \varphi_m\,[\alpha_{m-1}\,(2\,\beta_{m-1} + \beta_m) + \alpha_m\,(\beta_{m-1} + 2\,\beta_m)] \\
&+ Z_7 \sum_{7,0}^{7,n} \varphi_m\,(\alpha_{m-1}^2 + \alpha_{m-1}\,\alpha_m + \alpha_m^2) \\
&+ \varphi_{7,n}\,[Y_8\,\gamma_{8,1}\,(1 + 2\,\alpha_{7,n-1}) - 3\,X_8\,(1 + \alpha_{7,n-1}) + \alpha_{8,1}\,(1 + 2\,\alpha_{7,n-1})\,(X_8 - Z_8) \quad (7\,\mathrm{c}).
\end{aligned}
$$

Setzt man noch kurz

$$
\sum_{7,0}^{7,n} \varphi_m\,(\alpha_{m-1}^2 + \alpha_{m-1}\,\alpha_m + \alpha_m^2) = \alpha_7^2, \qquad \sum_{7,0}^{7,n} \varphi_m\,(\beta_{m-1}^2 + \beta_{m-1}\,\beta_m + \beta_m^2) = \beta_7^2
$$

$$
\sum_{7,0}^{7,n} \varphi_m\,(\gamma_{m-1}^2 + \gamma_{m-1}\,\gamma_m + \gamma_m^2) = \gamma_7^2, \qquad \sum_{7,0}^{7,n} \varphi_m\,[\alpha_{m-1}\,(2\,\beta_{m-1} + \beta_m) + \alpha_m\,(\beta_{m-1} + 2\,\beta_m)] = \alpha_7\,\beta_7
$$

$$
\sum_{7,0}^{7,n} \varphi_m\,[\alpha_{m-1}\,(2\,\gamma_{m-1} + \gamma_m) + \alpha_m\,(\gamma_{m-1} + 2\,\gamma_m)] = \alpha_7\,\gamma_7
$$

$$
\sum_{7,0}^{7,n} \varphi_m\,[\beta_{m-1}\,(2\,\gamma_{m-1} + \gamma_m) + \beta_m\,(\gamma_{m-1} + 2\,\gamma_m)] = \beta_7\,\gamma_7,
$$

so lauten schließlich die drei Gruppenelastizitätsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
0 = \sum_{7,0}^{7,n} S_m' &+ \varphi_{7,1}\,\gamma_{7,1}\,[2\,Y_6\,\gamma_{6,n-1} - 3\,Z_6 - 2\,\beta_{6,n-1}\,(X_6 - Z_6)] \\
&- 2\,Y_7\,\gamma_7^2 + X_7\,\beta_7\,\gamma_7 + Z_7\,\alpha_7\,\gamma_7 \\
&+ \varphi_{7,n}\,\gamma_{7,n-1}\,[2\,Y_8\,\gamma_{8,1} - 3\,X_8 + 2\,\alpha_{8,1}\,(X_8 - Z_8)] \quad \ldots \ldots \quad (8\,\mathrm{a}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = \sum_{7,0}^{7,n} R_m' &+ \varphi_{7,1}\,[(1 + 2\,\beta_{7,1})\,\{Y_6\,\gamma_{6,n-1} - \beta_{6,n-1}\,(X_6 - Z_6)\} - 3\,Z_6\,(1 + \beta_{7,1})] \\
&- Y_7\,\beta_7\,\gamma_7 + 2\,X_7\,\beta_7^2 + Z_7\,\alpha_7\,\beta_7 \\
&+ \varphi_{7,n}\,\beta_{7,n-1}\,[Y_8\,\gamma_{8,1} - 3\,X_8 + 2\,\alpha_{8,1}\,(X_8 - Z_8)] \quad \ldots \ldots \quad (8\,\mathrm{b}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = \sum_{7,0}^{7,n} L_m' &+ \varphi_{7,1}\,\alpha_{7,1}\,[Y_6\,\gamma_{6,n-1} - 2\,\beta_{6,n-1}\,(X_6 - Z_6) - 3\,Z_6) \\
&- Y_7\,\alpha_7\,\gamma_7 + X_7\,\alpha_7\,\beta_7 + 2\,Z_7\,\alpha_7^2 \\
&+ \varphi_{7,n}\,[(1 + 2\,\alpha_{7,n-1})\,\{Y_8\,\gamma_{8,1} + \alpha_{8,1}\,(X_8 - Z_8)\} - 3\,X_8\,(1 + \alpha_{7,n-1})] \quad . \quad (8\,\mathrm{c}).
\end{aligned}
$$

Das sind die drei Gruppengleichungen, nach denen jeder beliebig gestaltete steife Rahmen berechnet werden kann. Es sind einfache Momentengleichungen, die den Gleichungen von **Ratzersdorfer**[1]) entsprechen, nur mit dem Unterschied, daß die statisch unbestimmten Größen schon gewählt und die Ausdrücke für M in jedem einzelnen Stabe eingesetzt sind. Es ist nur noch notwendig, die Zahlen α, β, γ, φ, wie sie sich aus den äußeren Abmessungen des gerade zur Berechnung vorliegenden Rahmens ergeben, einzusetzen, um zu den Bestimmungsgleichungen für die statisch unbestimmten Größen zu kommen.

Bei den Anfangsgleichungen fallen, da $Y_0 = 0$, $X_0 = 0$, $Z_0 = 0$, die Anfangssummanden jeder Gleichung fort, bei den Endgleichungen, da $Y_{n+1} = 0$, $X_{n+1} = 0$, $Z_{n+1} = 0$, die Endsummanden jeder Gleichung fort. Ferner ist zu beachten, daß in jeder Oeffnung

$$\alpha_0 = 0 \quad \text{und} \quad \beta_0 = 1, \quad \text{ferner} \quad \alpha_n = 1 \quad \text{und} \quad \beta_n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (9\,\text{a})$$

sind, ferner daß

$$\alpha_m + \beta_m = \frac{a_m + b_m}{l} = \frac{l}{l} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9\,\text{b}).$$

4. Gleichungen für Spezialfälle. Es bleibt noch zu zeigen, wie aus den allgemein gültigen Gl. (8) die Gleichungen für Spezialfälle abgeleitet werden können. Stehen zunächst die Stäbe, mit denen die einzelnen Oeffnungen zusammenhängen, lotrecht, so sind gemäß Gl. (9) und Abb. 6:

$$\alpha_{6,n-1} = \alpha_{6,n} = 1, \quad \beta_{6,n-1} = \beta_{6,n} = 0, \quad \alpha_{7,n-1} = \alpha_{7,n} = 1, \quad \beta_{7,n-1} = \beta_{7,n} = 0,$$
$$\alpha_{8,n-1} = \alpha_{8,n} = 1, \quad \beta_{8,n-1} = \beta_{8,n} = 0.$$

Die je drei Mittelsummanden der Gl. (8) bleiben dadurch unverändert, während die Anfangs- und Endsummanden folgende einfachere Form annehmen:

$$0 = \sum_{7,0}^{7,n} S_m' + q_{7,1}\,\gamma_{7,1}\,(2\,Y_6\,\gamma_{6,n-1} - 3\,Z_6) - 2\,Y_7\,\gamma_7^{\,2} + X_7\,\beta_7\,\gamma_7 + Z_7\,\alpha_7\,\gamma_7$$
$$+ q_{7,n}\,\gamma_{7,n-1}\,(2\,Y_8\,\gamma_{8,1} - 3\,X_8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10\,\text{a}),$$

$$0 = \sum_{7,0}^{7,n} R_m' + 3\,q_{7,1}\,(Y_6\,\gamma_{6,n-1} - 2\,Z_6) - Y_7\,\beta_7\,\gamma_7 + 2\,X_7\,\beta_7^{\,2} + Z_7\,\alpha_7\,\beta_7 \quad . \quad . \quad . \quad (10\,\text{b}),$$

$$0 = \sum_{7,0}^{7,n} L_m' - Y_7\,\alpha_7\,\gamma_7 + X_7\,\alpha_7\,\beta_7 + 2\,Z_7\,\alpha_7^{\,2} + 3\,q_{7,n}\,(Y_8\,\gamma_{8,1} - 2\,X_8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10\,\text{c}).$$

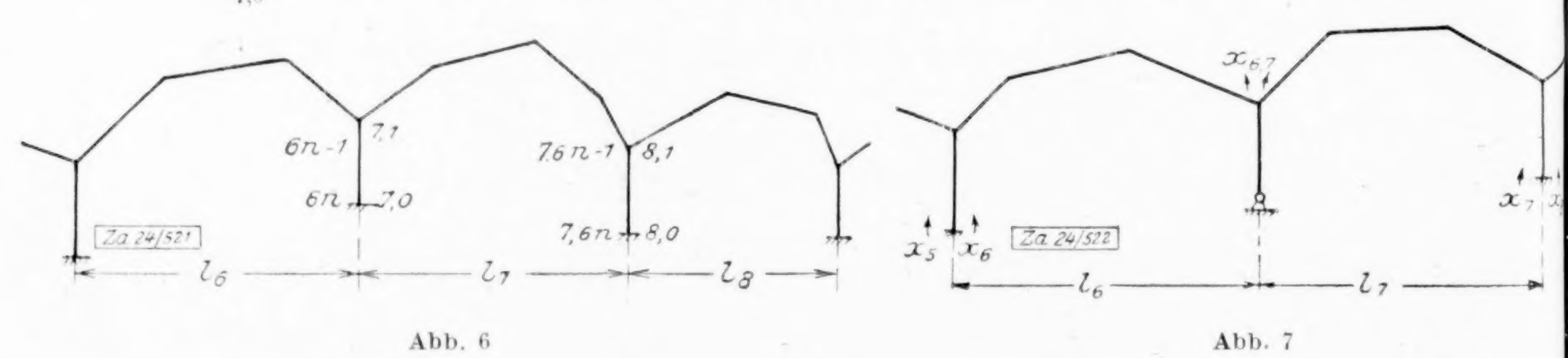


Abb. 6 Abb. 7

Ist eine Stütze nicht eingespannt, sondern nur gelenkartig gelagert, so muß das Gesamteinspannungsmoment dieser Stütze gleich 0 sein, d. h. wenn man z. B. die Stütze zwischen der 6-ten und 7-ten Oeffnung betrachtet,

$$Z_6 = X_7 = -X_{6,7} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Aus den beiden Stützeneinspannungsmomenten entsteht das negative Moment, mit dem die beiden Stabzüge im Punkte $6_{,n-1} = 7_{,1}$ zusammenhängen. Wollte man für $X_{6,7}$ die Elastizitätsgleichung ableiten, so würde die Bestimmungsgleichung dafür

$$0 = \int M x_{6,7}\, d\,\varphi$$

lauten. Das ist aber für die beiden einzelnen Teile von $X_{6,7}$ schon geschehen, d. h. um die Elastizitätsgleichung für $X_{6,7}$ zu erhalten, schreibt man die Gleichung für Z_6 und die Gleichung für X_7 hin, die als solche einzeln nun nicht mehr gültig sind, setzt $Z_6 = X_7 = -X_{6,7}$ und addiert beide Gleichungen, wodurch aus beiden eine neue entsteht. Es

[1]) Diese Zeitschrift, Bd. 1, Heft 5, S. 417 ff.

sind damit wieder ebenso viele Gleichungen vorhanden wie statisch unbestimmte Größen. Die Gleichung lautet:

$$0 = \sum_{6,0}^{6,n-1} L_m' + \sum_{7,1}^{7,n} R_m' - Y_6\,\alpha_6\,\gamma_6 - Y_7\,\beta_7\,\gamma_7 + X_6\,\alpha_6\,\beta_6 - 2\,X_{6,7}\,(\alpha_6^2 + \beta_7^2) + Z_7\,\alpha_7\,\beta_7 \qquad (12).$$

Sind alle Stützen nur gelenkartig gelagert, so ist in Gruppengleichung (12) noch X_6 durch $-X_{5,6}$ und Z_7 durch $-X_{7,8}$ zu ersetzen. Die **Y**-Gleichungen bleiben bis auf die Umsetzung nach Gl. (11) unverändert.

Ist die $6,_7$te-Stütze eine Pendelstütze, so können an ihr keine Horizontalschübe auftreten; außer Gl. (11) gilt noch

$$H_6 = H_7 = H_{6,7} \qquad (13).$$

Entsprechend der vorigen Betrachtung erhält man die Elastizitätsgleichung für $H_{6,7}$ durch Addition der Gleichung für H_6 und H_7. Die Bedeutung der h und der γ ändert sich dabei, wie es Abb. 8 zeigt. Die Gleichung lautet:

$$0 = \sum_{6,0}^{6,n-1} S_m' + \sum_{7,1}^{7,n} S_m' + \varphi_{6,1}\,\gamma_{6,1}\,(Y_5\,\gamma_{5,n-1} - 3\,Z_5) - 2\,Y_{6,7}\,(\gamma_6^2 + \gamma_7^2) + X_6\,\beta_6\,\gamma_6$$
$$- X_{6,7}\,(\alpha_6\,\gamma_6 + \beta_7\,\gamma_7) + Z_7\,\alpha_7\,\gamma_7 + \varphi_{7,n}\,\gamma_{7,n-1}\,(2\,Y_8\,\gamma_{8,1} - 3\,X_8 \qquad (14).$$

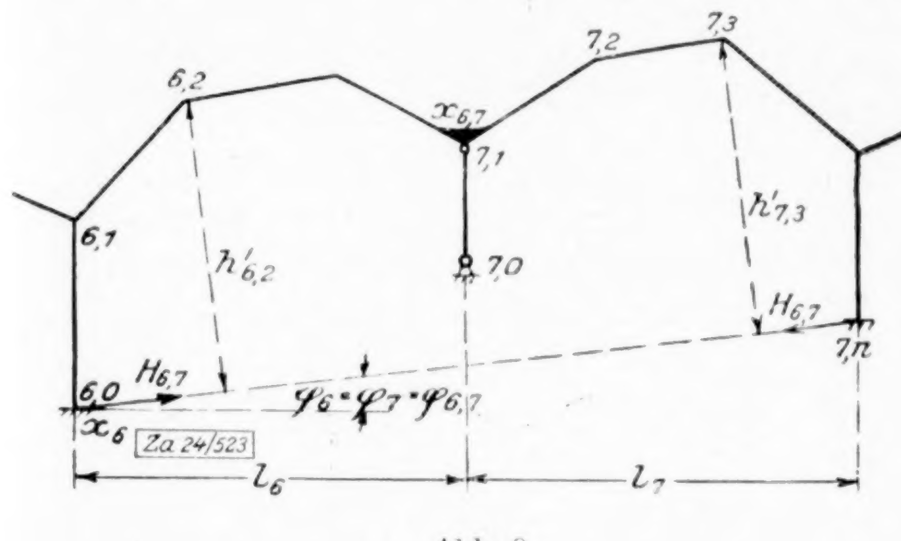


Abb. 8

5. Beispiel. Es sind sämtliche Elastizitätsgleichungen für den aus drei gleichen Oeffnungen bestehenden Hallenrahmen nach

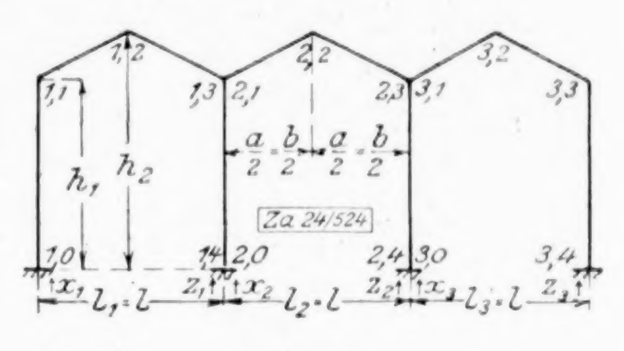


Abb. 9

Abb. 9 aufzustellen. Es werde gesetzt $hc = h_1$, dann sind

$$\gamma_{1,1} = \gamma_{1,3} = \gamma_{2,1} = \gamma_{2,3} = \gamma_{3,1} = \gamma_{3,3} = 1, \qquad \gamma_{1,0} = \gamma_{1,4} = \gamma_{2,0} = \gamma_{2,4} = \gamma_{3,0} = \gamma_{3,4} = 0.$$

Es werde angenommen, daß die Trägheitsmomente aller Stützen einander gleich $= J_1$ und die aller Balken einander gleich $= J_2$ seien. Es werde Jc so gewählt, daß $\varphi_2 = 1$ ist. Schließlich werde gesetzt:

$$\varphi_1 = \varphi \quad \text{und} \quad \gamma_2 = \gamma.$$

Dann sind für alle drei Oeffnungen:

$$\alpha^2 = \beta^2 = 3\,\varphi + 2, \quad \gamma^2 = 2\,[1 + \varphi + \gamma\,(1 + \gamma)], \quad \alpha\,\beta = 2, \quad \alpha\,\gamma = \beta\,\gamma = 3\,[1 + \varphi + \gamma].$$

Damit lauten die 9 Elastizitätsgleichungen:

$$0 = \sum_{1,0}^{1,4} S_m' - 4\,Y_1\,[1 + \varphi + \gamma\,(1 + \gamma)] + 3\,(X_1 + Z_1)\,(1 + \varphi + \gamma) + \varphi\,(2\,Y_2 - 3\,X_2) \qquad (a),$$

$$0 = \sum_{1,0}^{1,4} R_m' - 3\,Y_1\,(1 + \varphi + \gamma) + 2\,X_1\,(3\,\varphi + 2) + 2\,Z_1 \qquad (b),$$

$$0 = \sum_{1,0}^{1,4} L_m' - 3\,Y_1\,(1 + \varphi + \gamma) + 2\,X_1 + 2\,Z_1\,(3\,\varphi + 2) + 3\,\varphi\,(Y_2 - 2\,X_2) \qquad (c),$$

$$0 = \sum_{2,0}^{2,4} S_m' + \varphi\,(2\,Y_1 - 3\,Z_1) - 4\,Y_2\,[1 + \varphi + \gamma\,(1 + \gamma)] + 3\,(X_2 + Z_2)\,(1 + \varphi + \gamma) + \varphi\,(2\,Y_3 - 3\,X_3) \qquad (d),$$

$$0 = \sum_{2,0}^{2,4} R_m' + 3\,\varphi\,(Y_1 - 2\,Z_1) - 3\,Y_2\,(1 + \varphi + \gamma) + 2\,X_2\,(3\,\varphi + 2) + 2\,Z_2 \qquad (e),$$

$$0 = \sum_{2,0}^{2,4} L_m' - 3\,Y_2\,(1 + \varphi + \gamma) + 2\,X_2 + 2\,Z_2\,(3\,\varphi + 2) + 3\,\varphi\,(Y_3 - 2\,X_3) \qquad (f),$$

$$0 = \sum_{3,0}^{3,4} S_m' + \varphi\,(2\,Y_2 - 3\,Z_2) - 4\,Y_3\,[1 + \varphi + \gamma\,(1 + \gamma)] + 3\,(X_3 + Z_3)\,(1 + \varphi + \gamma) \quad . \quad (g),$$

$$0 = \sum_{3,0}^{3,4} R_m' + 3\,\varphi\,(Y_2 - 2\,Z_2) - 3\,Y_3\,(1 + \varphi + \gamma) + 2\,X_3\,(3\,\varphi + 2) + 2\,Z_3 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (h),$$

$$0 = \sum_{3,0}^{3,4} L_m' - 3\,Y_3\,(1 + \varphi + \gamma) + 2\,X_3 + 2\,Z_3\,(3\,\varphi + 2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (i).$$

Sind alle Stützen nur gelenkartig gelagert, so sind

$$X_1 = Z_3 = 0, \qquad Z_1 = X_2 = -\,X_{2,3}, \qquad Z_2 = X_3 = -\,X_{2,3}.$$

Gl. (b) und (i) fallen fort, Gl. (c) und (e) und Gl. (f) und (h) verschmelzen zu je einer neuen Gleichung. Der Rahmen ist dann nur noch 5 fach statisch unbestimmt; die 5 Gleichungen lauten:

$$0 = \sum_{1,0}^{1,4} S_m' - 4\,Y_1\,[1 + \varphi + \gamma\,(1 + \gamma)] - 3\,X_{1,2}\,(1 + \gamma) + 2\,Y_2\,\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a),$$

$$0 = \sum_{2,0}^{2,4} S_m' + 2\,Y_1\,\varphi - 4\,Y_2\,[1 + \varphi + \gamma\,(1 + \gamma)] + 2\,Y_3\,\varphi - 3\,(X_{1,2} + X_{2,3})\,(1 + \gamma) \quad (b),$$

$$0 = \sum_{3,0}^{3,4} S_m' + 2\,Y_2\,\varphi - 4\,Y_3\,[1 + \varphi + \gamma\,(1 + \gamma)] - 3\,X_{2,3}\,(1 + \gamma) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (c),$$

$$0 = \sum_{1,0}^{1,3} L_m' + \sum_{2,1}^{2,3} R_m' - 3\,(1 + \gamma)\,(Y_1 + Y_2) - 2\,(4\,X_{1,2} + X_{2,3}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d),$$

$$0 = \sum_{2,1}^{2,3} L_m' + \sum_{3,1}^{3,4} R_m' - 3\,(1 + \gamma)\,(Y_2 + Y_3) - 2\,(X_{1,2} + 4\,X_{2,3}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (e).$$

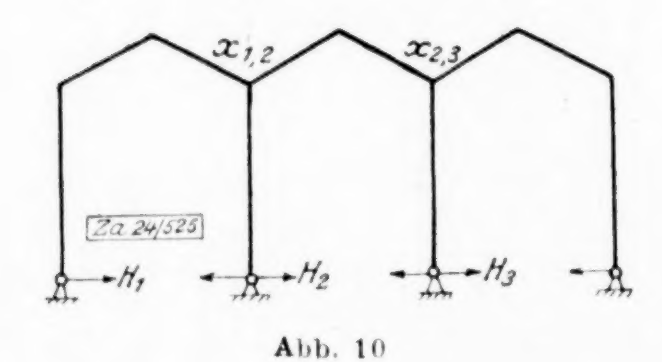


Abb. 10

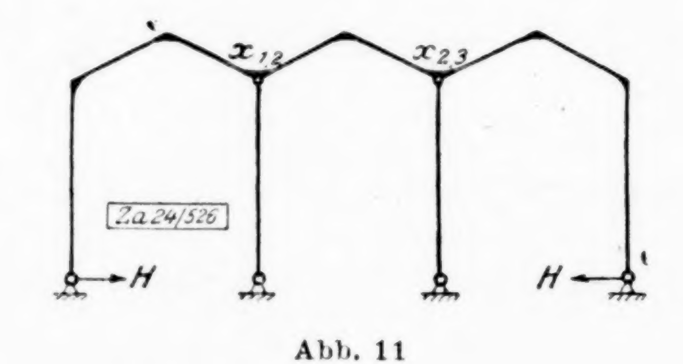


Abb. 11

Sind die beiden Mittelstützen Pendelstützen oder unten gelenkartig gelagert, so ist

$$H_1 = H_2 = H_3 = H.$$

Gl. (a, b, c) verschmelzen zu einer Gleichung, der Rahmen ist dann nur noch 3-fach statisch unbestimmt; die drei Gleichungen lauten:

$$0 = \sum_{1,0}^{1,3} S_m' + \sum_{2,1}^{2,3} S_m' + \sum_{3,1}^{3,4} S_m' - 4\,Y\,[1 + \varphi + \gamma\,(1 + \gamma)] - 6\,(X_{1,2} + X_{2,3})\,(1 + \gamma) \quad (a),$$

$$0 = \sum_{1,0}^{1,3} L_m' + \sum_{2,1}^{2,3} R_m' - 6\,Y\,(1 + \gamma) - 2\,(4\,X_{1,2} + X_{2,3}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b),$$

$$0 = \sum_{2,1}^{2,3} L_m' + \sum_{3,1}^{3,4} R_m' - 6\,Y\,(1 + \gamma) - 2\,(X_{1,2} + 4\,X_{2,3}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (c).$$

Zahlenbeispiel: Es sei $l_1 = l_2 = l_3 = 4_1 - m$, $h_1 = 4_1 - m$, $h_2 = 6_1 - m$. Das Trägheitsmoment der Stützen sei doppelt so groß als das der Balken, also $\frac{J_1}{J_2} = \frac{2}{1}$. Nun war $\varphi_2 = \frac{s_2}{h\,c}\,\frac{J\,c}{J_2} = 1 = \frac{2{,}83}{4{,}00}\,\frac{J\,c}{J_2}$, also $J\,c = 1{,}41\,J_2$ und $J_1 = 2\,J_2 = 1{,}41\,J\,c$.

Damit wird $$\varphi = \varphi_1 = \frac{s_1}{h\,c}\,\frac{J_1}{J\,c} = \frac{4{,}00}{4{,}00}\,\frac{1{,}41\,J\,c}{J\,c} = \sim 1{,}5.$$

Ferner ist $$\gamma = \gamma_2 = \frac{h_2}{h\,c} = \frac{6{,}00}{4{,}00} = 1{,}5.$$

Es lauten daher die 9 Gleichungen:

$$0 = \Sigma S_m' - 25\,Y_1 + 12\,(X_1 + Z_1) + 3\,Y_2 - 4{,}5\,X_2$$
$$0 = \Sigma R_m' - 12\,Y_1 + 13\,X_1 + 2\,Z_1$$
$$0 = \Sigma L_m' - 12\,Y_1 + 2\,X_1 + 13\,Z_1 + 4{,}5\,Y_2 - 9\,X_2$$
$$0 = \Sigma S_m' + 3\,Y_1 - 4{,}5\,X_1 - 25\,Y_2 + 12\,(X_2 + Z_2) + 3\,Y_3 - 4{,}5\,X_3$$
$$0 = \Sigma R_m' + 4{,}5\,Y_1 - 9\,Z_1 - 12\,Y_2 + 13\,X_2 + 2\,Z_2$$
$$0 = \Sigma L_m' - 12\,Y_2 + 2\,X_2 + 13\,Z_2 + 4{,}5\,Y_3 - 9\,X_3$$
$$0 = \Sigma S_m' + 3\,Y_2 - 4{,}5\,Z_2 - 25\,Y_3 + 12\,(X_3 + Z_3)$$
$$0 = \Sigma R_m' + 4{,}5\,Y_2 - 9\,Z_2 - 13\,Y_3 + 13\,X_3 + 2\,Z_3$$
$$0 = \Sigma L_m' - 12\,Y_3 + 2\,X_3 + 13\,Z_3.$$

6. Berücksichtigung von Temperaturänderungen. Sind gleichmäßige und ungleichmäßige Erwärmung zu berücksichtigen, so

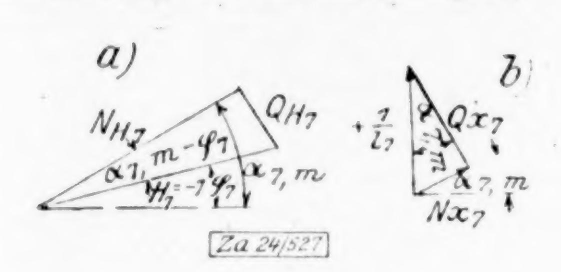


Abb. 12 a, b

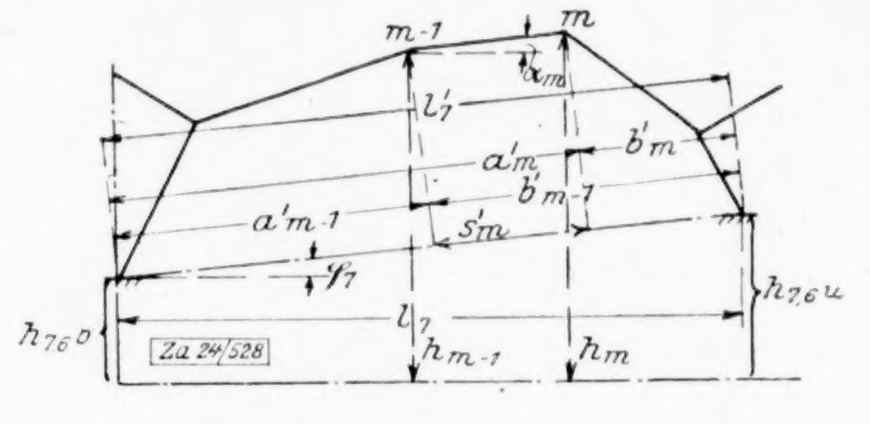


Abb. 13

kommen zu den Gleichungen 2 noch die Summanden hinzu:

$$0 = \ldots\ldots\ldots + \int M_{H7}\,\varepsilon\,\frac{tu - to}{d}\,d\,s + \int N_{H7}\,\varepsilon\,t\,d\,s \quad \ldots \qquad (15\,a),$$

$$0 = \ldots\ldots\ldots = \int M_{X7}\,\varepsilon\,\frac{tu - to}{d}\,d\,s + \int N_{X7}\,\varepsilon\,t\,d\,s \quad \ldots \qquad (15\,b),$$

$$0 = \ldots\ldots\ldots = \int M_{Z7}\,\varepsilon\,\frac{tu - to}{d}\,d\,s + \int N_{Z7}\,\varepsilon\,t\,d\,s \quad \ldots \qquad (15\,c).$$

Nun sind nach Abb. 12:

$$N_{H7} = +\,1\cos(\alpha_{7,m} - \varphi_7), \quad \text{ferner waren} \quad M_{H7} = +\,1\,[h_{7,m-1}' + s_x \sin(\alpha_{7,m} - \varphi_7)]$$

$$N_{X7} = -\,\frac{1}{l_7}\sin\alpha_{7,m} \qquad M_{X7} = -\,1\,\frac{b_{m-1} - s\,x\cos\alpha_{7,m}}{l_{,7}}$$

$$N_{Z7} = +\,\frac{1}{l_7}\sin\alpha_{7\,m} \qquad M_{Z7} = -\,1\,\frac{a_{m-1} + s\,x\cos\alpha_{7,m}}{l_{,7}}.$$

Für den m-ten Stab der 7-ten Oeffnung ergibt daher die Integration der obigen Summanden:

$$\ldots\ldots\ldots + \varepsilon\,t\,s_m' + \varepsilon\,\frac{tu - to}{d_m}\,s_m\,\frac{h_{m-1}' + h_m'}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \qquad (a),$$

$$\ldots\ldots\ldots - \frac{\varepsilon\,t}{l_7}(h_m - h_{m-1}) - \varepsilon\,\frac{tu - to}{d_m}\,\frac{s_m}{2\,l_7}(b_{m-1} + b_m) \quad \ldots \qquad (b),$$

$$\ldots\ldots\ldots + \frac{\varepsilon\,t}{l_7}(h_m - h_{m-1}) - \varepsilon\,\frac{tu - to}{d_m}\,\frac{s_m}{2\,l_7}(a_{m-1} + a_m)\,. \quad \ldots \qquad (c).$$

Erweitert man gemäß der vorigen Rechnung die Summanden der ersten Gleichung mit $\frac{6\,E\,Jc}{h\,c^2}$ und die der beiden anderen Gleichungen mit $-\frac{6\,E\,Jc}{h\,c}$ und setzt:

$$\frac{a_m'}{h\,c} = \alpha_m', \qquad \frac{a_{m-1}'}{h\,c} = \alpha_{m-1}', \qquad \frac{h_m}{l_7} = \gamma_m', \qquad \frac{h_{m-1}}{l_7} = \gamma_{m-1}'$$

und beachtet, daß

$$s_m' = s_m\cos(\alpha_{7\,m} - \varphi_7) = a_m' - a_{m-1}' \qquad \text{und} \qquad Jc\,\frac{s_m}{h\,c} = J_m\,\varphi_m$$

ist, so gehen die Gl. (15) über in:

$$0 = \ldots\ldots + \frac{6\,E\,\varepsilon\,Jc}{h\,c}\sum_{7,0}^{7,n} t_m\,(\alpha_m' - \alpha_{m-1}') + 3\,E\,\varepsilon\sum_{7,0}^{7,n}\varphi_m\,\frac{tu - to}{d_m}\,(\gamma_{m-1} + \gamma_m)\,J_m \quad (16\,a$$

$$0 = \ldots\ldots + \frac{6\,E\,\varepsilon\,Jc}{hc} \sum_{7,0}^{7,n} t_m (\gamma_m' - \gamma_{m-1}') + 3\,E\,\varepsilon \sum_{7,0}^{7,n} \varphi_m \frac{tu - to}{d_m} (\beta_{m-1} + \beta_m)\,J_m \quad (16\,\text{b}),$$

$$0 = \ldots\ldots + \frac{6\,E\,\varepsilon\,Jc}{hc} \sum_{7,0}^{7,n} t_m (\gamma_m' - \gamma_{m-1}') + 3\,E\,\varepsilon \sum_{7,0}^{7,n} \varphi_m \frac{tu - to}{d_m} (\alpha_{m-1} + \alpha_m)\,J_m \quad (16\,\text{c}).$$

Setzt man noch kurz:

$$\frac{6\,E\,\varepsilon\,Jc}{hc}\,t_m = T_m \quad \text{und} \quad 3\,E\,\varepsilon\,\varphi_m\,J_m \frac{tu - to}{d_m} = \varDelta\,T_m,$$

es bedeuten darin T_m und $\varDelta\,T_m$ auch wieder Biegungsmomente, so lauten schließlich die Gleichungen:

$$0 = \ldots\ldots + \sum_{7,0}^{7,n} T_m (\alpha_m' - \alpha_{m-1}') + \sum_{7,0}^{7,n} \varDelta\,T_m (\gamma_{m-1} + \gamma_m) \quad . \quad . \quad (17\,\text{a}),$$

$$0 = \ldots\ldots + \sum_{7,0}^{7,n} T_m (\gamma_m' - \gamma_{m-1}') + \sum_{7,0}^{7,n} \varDelta\,T_m (\beta_{m-1} + \beta_m) \quad . \quad . \quad (17\,\text{b}),$$

$$0 = \ldots\ldots - \sum_{7,0}^{7,n} T_m (\gamma_m' - \gamma_{m-1}') + \sum_{7,0}^{7,n} \varDelta\,T_m (\alpha_{m-1} + \alpha_m) \quad . \quad . \quad (17\,\text{c}).$$

Die Gleichungen sind so aufgestellt, daß der Temperatureinfluß eines jeden einzelnen Stabes einer jeden einzelnen Oeffnung untersucht werden kann. Findet nur gleichmäßige Erwärmung der Stäbe statt, so fallen die letzten Summanden der drei Gleichungen fort; findet nur gleichmäßige Erwärmung des ganzen Rahmens statt, so kann t_m vor das Summenzeichen gesetzt werden. Dann sind:

$$\sum_{7,0}^{7,n} (\alpha_m' - \alpha_m') = \sum_{7,0}^{7,n} \frac{a_m' - a_{m-1}'}{hc} = \frac{l_7'}{hc}.$$

Es ist l_7' nach Abb. 13 der Abstand der Auflager.

$$\sum_{7,0}^{7,n} (\gamma_m' - \gamma_{m-1}') = \sum_{7,0}^{7,n} \frac{h_m - h_{m-1}}{l_7} = \frac{h_{7,n} - h_{7,0}}{l_7} = \operatorname{tg} \varphi_7,$$

und die Gleichungen lauten:

$$0 = \ldots\ldots + T \frac{l_7'}{hc}, \quad 0 = \ldots\ldots + T \operatorname{tg} \varphi_7, \quad 0 = \ldots\ldots - T \operatorname{tg} \varphi_7 \quad (18\,\text{a—c}).$$

7. Berücksichtigung von Stützenverschiebungen. Sind Stützenverschiebungen zu berücksichtigen, so lauten die vervollständigten Elastizitätsgleichungen:

$$1\,\delta_{H7} + L_{H7} = \int M_{H7}\,d\,\varphi, \quad 1\,\delta_{X7} + L_{X7} = \int M_{X7}\,d\,\varphi, \quad 1\,\delta_{Z7} + L_{Z7} = \int M_{Z7}\,d\,\varphi \quad (19\,\text{a—c}).$$

Es werde angenommen, daß sich infolge Nachgiebigkeit des Baugrundes oder infolge elastischen Nachgebens der Horizontalschubanker sich die Spannweite der 7-ten Oeffnung, gemessen in der Kämpferverbindungslinie, d. h. in Richtung der Kraft H, sich um $\varDelta\,l_7'$ vergrößert hat. Dann ist

$$1\,\delta_{H7} + L_{H7} = +\,1\,\varDelta l_7'.$$

Erweitert man gemäß der vorigen Rechnung den Summanden mit $\frac{6\,E\,Jc}{hc^2}$, so lautet die erste Gruppengleichung [vergl. Gl. (8 a)]

$$\frac{6\,E\,Jc\,\varDelta\,l_7'}{hc^2} = \sum_{7,0}^{7,n} S_m' + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20\,\text{a}).$$

Ist $\varDelta\,l_7'$ durch Beobachtung festgestellt worden oder die wahrscheinliche Größe angenommen, so ist sie in Gl. (19) einzusetzen, ist $\varDelta\,l_7'$ eine elastische Längenänderung infolge elastischen Nachgebens der Anker, und haben die Anker den Querschnitt F_7' und Elastizitätsmodul E_7', so ist

$$\varDelta\,l_7' = \frac{H_7\,l_7'}{E_7'\,F_7'}$$

Es werde angenommen, daß sich infolge Nachgiebigkeit des Baugrundes die linke Stütze der Oeffnung 7 gegen die rechte Stütze der 7-ten Oeffnung um $\varDelta\,h_7$ gesenkt habe. Dann ist

$$1\,\delta_{X7} + L_{X7} = -\frac{1}{l_7}\,\varDelta\,h_7$$

Erweitert man gemäß der vorigen Rechnung den Summanden mit $-\frac{6\,E\,J c}{h c}$, so lautet die zweite Gruppengleichung [vergl. Gl. (8 b)]

$$+\frac{6\,E\,J c\,\Delta\,h_7}{h\,c\,l_7}=\sum_{7,0}^{7,n} R_m'+\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20\,\mathrm{b}).$$

Entsprechend lautet die dritte Gruppengleichung [vergl. Gl. (8 a)]

$$-\frac{6\,E\,J c\,\Delta\,h_7}{h\,c\,l_7}=\sum_{7,0}^{7,n} L_m'+\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20\,\mathrm{c}).$$

8. Zusammenstellung. Für ein beliebig belastetes und beliebig gestaltetes statisch unbestimmtes Tragsystem, sofern es sich auf einen oder mehrere biegungsfeste Stabzüge zurückführen läßt, lauten unter Berücksichtigung von gleichmäßiger und ungleichmäßiger Erwärmung und elastischer und zufälliger Stützenverschiebung die drei Gruppenelastizitätsgleichungen

$$0=\sum_{7,0}^{7,n} S_m'+\sum_{7,0}^{7,n} T_m\,(\alpha_m'-\alpha_{m-1}')+\sum_{7,0}^{7,n}\Delta\,T_m\,(\gamma_{m-1}+\gamma_m)-\frac{6\,E\,J c\,\Delta\,l_7}{h\,c\,l_7}+\mathfrak{q}_{7;1}\,\gamma_{7,1}\cdot$$
$$(2\,Y_6\,\gamma_{6,n-1}-3\,Z_6)-2\,Y_7\,\gamma_7^2+X_7\,\beta_7\,\gamma_7+Z_7\,\alpha_7\,\gamma_7+\mathfrak{q}_{7,n}\,\gamma_{7;n-1}\,(2\,Y_8\,\gamma_{8;1}-3\,X_8) \quad (21\,\mathrm{a}),$$

$$0=\sum_{7,0}^{7,n} R_m'+\sum_{7,0}^{7,n} T_m\,(\gamma_m'-\gamma_{m-1}')+\sum_{7,0}^{7,n}\Delta\,T_m\,(\beta_{m-1}+\beta_m)-\frac{6\,E\,J c\,\Delta h_7}{h\,c\,l_7}$$
$$+3\,\mathfrak{q}_{7\,1}\,(Y_6\,\gamma_{6,n-1}-2\,Z_6)-Y_7\,\beta_7\,\gamma_7+2\,X_7\,\beta_7^2+Z_7\,\alpha_7\,\beta_7 \quad .\ .\ (21\,\mathrm{b}),$$

$$0=\sum_{7,0}^{7,n} L_m'-\sum_{7,0}^{7,n} T_m\,(\gamma_m'-\gamma_{m-1}')+\sum_{7,0}^{7,n}\Delta\,T_m\,(\alpha_{m-1}+\alpha_m)+\frac{6\,E\,J c\,\Delta h_7}{h\,c\,l_7}$$
$$-Y_7\,\alpha_7\,\gamma_7+X_7\,\alpha_7\,\beta_7+2\,Z_7\,\alpha_7^2+3\,\mathfrak{q}_{7,n}\,(Y_8\,\gamma_{8,1}-2\,X_8) \quad .\ .\ .\ .\ (21\,\mathrm{c}).$$

Durch zyklische Vertauschung der Zeiger lassen sich so viele Gleichungen hinschreiben, als statisch unbestimmte Größen vorhanden sind. Die Gleichungen gelten in obiger Form für nur eingespannte Stützen. Sind eine oder mehrere Stützen nur gelenkartig oder gleitartig gelagert, so sind die entsprechenden statisch unbestimmten Größen einander gleich zu setzen, bis die wirklich vorhandenen Auflagerbedingungen erfüllt sind und die einzelnen Gleichungen für die gleichen statisch unbestimmten Größen durch Addition zu neuen Gleichungen zusammenzuziehen.

Die Gleichungen haben gegenüber den ganz allgemeinen Verfahren von Bleich und Ratzersdorfer den Vorteil, daß die statisch unbestimmten Größen schon gewählt und eingesetzt sind, dagegen haben sie den Nachteil, daß sie nur für Konstruktionen gelten, die sich auf den biegungsfesten Stabzug zurückführen lassen. Sie sind also nicht anwendbar etwa für Virendelleträger. Sie gelten aber auch ohne weiteres für Gewölbe, insofern, als sich jedes Gewölbe durch einen genügend häufig gebrochenen Zug aus graden Stäben annäherungsweise ersetzen läßt, ein Verfahren, das bei der praktischen Durchführung von Gewölbeberechnungen stets angewandt wird. 389

Zur zeichnerischen Ermittlung der Beschleunigungen bei zwangläufigen Getrieben.

Von TH. PÖSCHL in Prag.[1])

Von befreundeter Seite aus der Praxis wurde mir mitgeteilt, daß es wünschenswert wäre, die Ermittlung der Konstruktion der Beschleunigung der Ventilstange bei unrunden Steuerscheiben auch für den Fall zu geben, daß die Berührung der Ventilstange nicht punktförmig angenommen wird, wie in den Abb. 4 und 5 der genannten Arbeit, sondern die Berührung in einer ebenen (oder fallweise auch gekrümmten) Fläche erfolge, auf welcher die Steuerscheibe während des Anhubes des Ventils gleitet. Die Durchführung der hierfür geltenden Konstruktion nach der auseinandergesetzten Methode besitzt keinerlei Schwierigkeiten und da diese für weitere Kreise der Praxis von Interesse sein dürfte, möchte ich sie hier als Nachtrag kurz angeben.

[1]) Nachtrag zu dem Aufsatz desselben Verfassers, diese Zeitschrift, Bd. 3, 1923, S. 128 bis 136.

In Abb. 1 ist die Konstruktion für die Lage 2 des Steuergetriebes ausgeführt; wenn der Krümmungsmittelpunkt für diese Lage A ist, so ist das »Ersatzgetriebe«, für welches die Beschleunigungskonstruktion anzuwenden ist, durch die Schubkurbel O_1ABC gegeben. Wenn es sich daher um eine konstante Drehung der Steuerscheibe handelt, so wird die Strecke AO_1 als Maß für die Beschleunigung des Punktes A angenommen, der Drehpol Ω_2 für die Stellung 2 gesucht, $O_1\alpha \perp BC$ gezogen und mit AB in α zum Schnitt gebracht. Wird sodann $O_1\alpha' \parallel \alpha\Omega_2$ gezogen, so gibt $\alpha' A$ unmittelbar $b^{(n)}_{AB}$. Man müßte nunmehr in α' die Normale auf BC ziehen, diese Normale mit der Parallelen zu BC durch O_1 (d. i. der Richtung der Beschleunigung von B!) zum Schnitt bringen. Diese zwei letzten Linien kann man sich ersparen; es gibt $\overline{\alpha\alpha'}$ unmittelbar die gesuchte Beschleunigung. Die Konstruktion für die Stelle 1 des geraden Anhubes ergibt die unendlich große Beschleunigung $b_{1\infty}$ und für den folgenden gekrümmten Teil des Anhubes die Verzögerung b_1. An der Stelle 1 erfolgt daher ein Sprung der Beschleunigung von $b_{1\infty}$ auf $-b_1$.

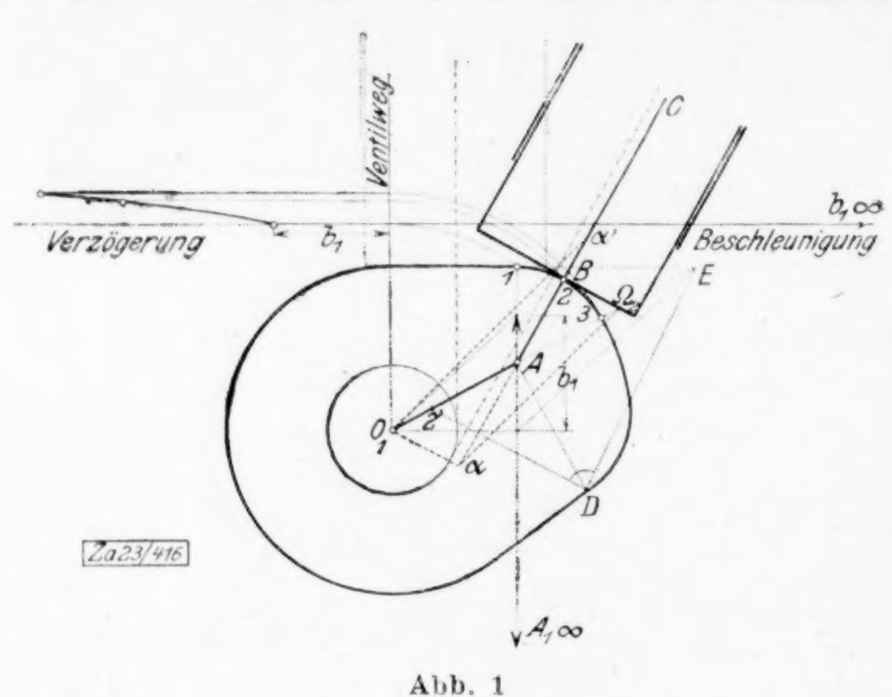


Abb. 1

In Abb. 2 ist dieses gerade Stück vermieden durch Einschaltung eines gekrümmten Anhubes, für den die Konstruktion in derselben Weise durchzuführen ist. An der Stelle 2, wo die beiden ineinander übergehen, sind die beiden Krümmungsmittelpunkte mit A und A^* bezeichnet und die Beschleunigungen des Ventils werden ebenso wie früher durch die Strecken $\overline{\alpha\alpha'}$ bezw. $\overline{\alpha\alpha'^*}$ erhalten. Um beide Beschleunigungen auf denselben Vergleichsmaßstab zu bringen, muß man berücksichtigen, daß für beide Konstruktionen jedesmal die Strecke $\overline{O_1A}$ bezw. $\overline{O_1A^*}$ die Vergleichsbeschleunigung ist. Wenn daher in der Beschleunigungslinie der Abb. 2 die Strecke $\overline{\alpha\alpha'^*}$ unmittelbar als Beschleunigung aufgetragen wird, so ist die Strecke $\overline{\alpha\alpha'}$ im Verhältnis $\overline{O_1A^*}/\overline{O_1A}$ zu vergößern, um denselben Maßstab für die Beschleunigungen herzustellen. Für die Lagen 0 und 3 würde sich das Schubkurbelgetriebe, auf das die Konstruktion zurückgeführt wird, in den Totlagen befinden, weshalb für diese Stellen die Konstruktion so vorzunehmen ist, wie es bei den Totlagen des Schubkurbelgetriebes angegeben wurde. —

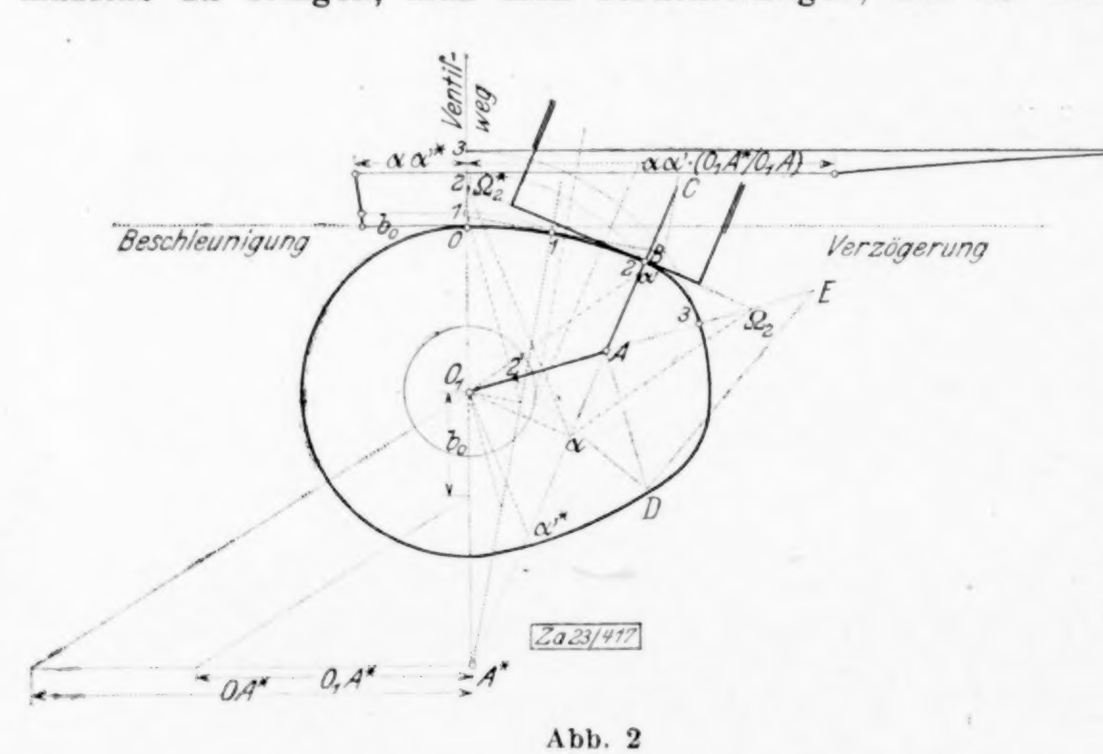


Abb. 2

Als Berichtigung sei hier ferner hinzugefügt, daß im Abschnitt **4** für R_2 der Krümmungshalbmesser des von B beschriebenen Punktes zu setzen ist, der im allgemeinen von $\overline{B\Omega}$ verschieden ist. Die dort angegebene Konstruktion ist daher mit Bezugnahme auf diese Bemerkung abzuändern.

Wenn — was in vielen Fällen eintritt — bei irgend einer der Konstruktionen der Drehpol Ω unzugänglich wird, so hat man etwa so vorzugehen, wie es O. Mohr für die Schubkurbel gelehrt hat (s. **2**), oder ähnliche Hilfen anzuwenden

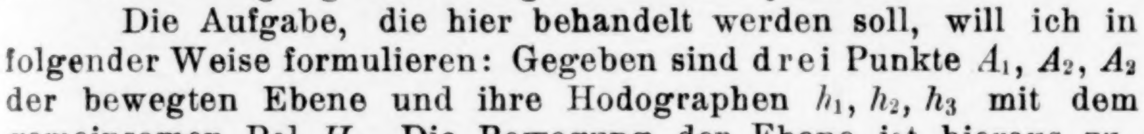
Die komplane Bewegung einer Ebene, deren Geschwindigkeitszustand gegeben ist.

Von **H. ALT** in Dresden.

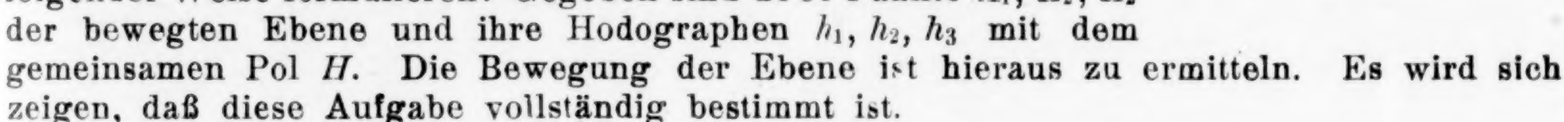
In der Getriebesynthese tritt die Aufgabe auf, Getriebe derart zu konstruieren, daß ein Glied bei seiner Bewegung bestimmte Forderungen bezüglich seines Geschwindigkeitszustandes zu erfüllen hat. Hieraus ergibt sich eine Fragestellung, die in der vorliegenden Arbeit behandelt werden soll, nämlich die Frage danach, wie sich eine Ebene bewegen muß, deren Geschwindigkeitszustand vorgeschrieben ist. In welcher Weise der Geschwindigkeitszustand gegeben ist, wird im folgenden noch angegeben werden.

Bewegt sich ein Punkt A mit der Geschwindigkeit v auf seiner Bahn a, so trägt man seinen Geschwindigkeitsvektor von einem festen Punkt H aus um 90^0 gedreht auf (Abb. 1). Der Endpunkt V dieses Geschwindigkeitsvektors HV bewegt sich auf einer Kurve h, die man den polaren Geschwindigkeitsplan oder den Hodographen[1]) des Punktes A nennt. Der Punkt H heißt der Pol des Hodographen. Durch den Hodographen wird, wenn man seinen Pol kennt, der Geschwindigkeitsverlauf der Bewegung des entsprechenden Punktes dargestellt Von den Eigenschaften des Hodographen wird im folgenden insbesondere die benutzt werden, daß die Hodographennormale der Beschleunigung des bewegten Punktes parallel ist.

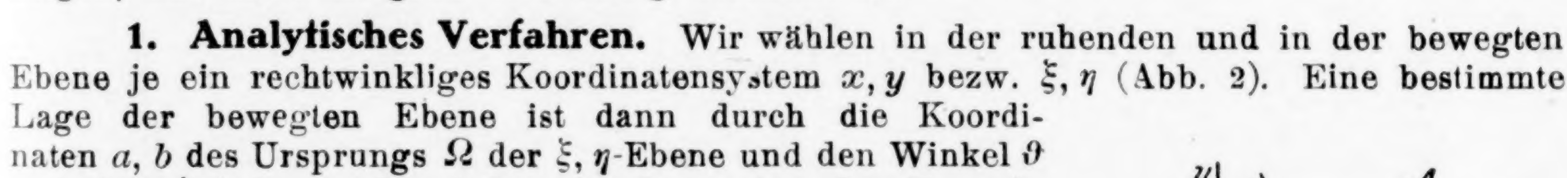
Abb. 1



Die Aufgabe, die hier behandelt werden soll, will ich in folgender Weise formulieren: Gegeben sind drei Punkte A_1, A_2, A_3 der bewegten Ebene und ihre Hodographen h_1, h_2, h_3 mit dem gemeinsamen Pol H. Die Bewegung der Ebene ist hieraus zu ermitteln. Es wird sich zeigen, daß diese Aufgabe vollständig bestimmt ist.



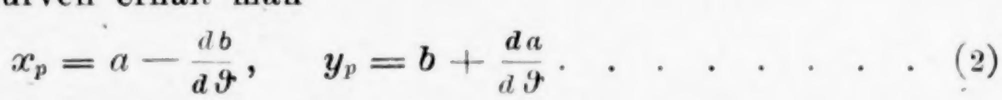
1. Analytisches Verfahren. Wir wählen in der ruhenden und in der bewegten Ebene je ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y bezw. ξ, η (Abb. 2). Eine bestimmte Lage der bewegten Ebene ist dann durch die Koordinaten a, b des Ursprungs Ω der ξ, η-Ebene und den Winkel ϑ zwischen ξ-Achse und x-Achse gegeben. Aus den Formeln für die Koordinatentransformation ergeben sich die Gleichungen[2])



$$x = a + \xi \cos\vartheta - \eta \sin\vartheta, \qquad y = b + \xi \sin\vartheta + \eta\cos\vartheta \quad (1),$$

die man als Bewegungsgleichungen der bewegten Ebene betrachten kann. Sind a und b als Funktionen des Winkels ϑ, der hier als Bewegungsparameter verwendet werden soll, gegeben, so ist die Bewegung der Ebene bestimmt. Als Gleichungen der beiden Polkurven erhält man

Abb. 2



$$x_p = a - \frac{db}{d\vartheta}, \qquad y_p = b + \frac{da}{d\vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

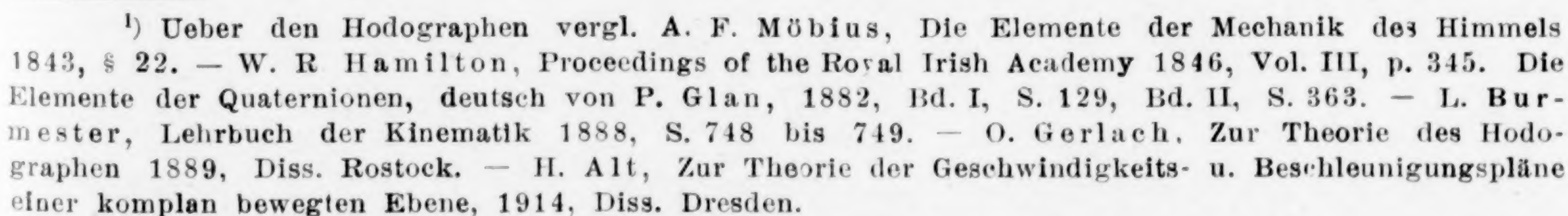
bezw.

$$\xi_p = \frac{da}{d\vartheta}\sin\vartheta - \frac{db}{d\vartheta}\cos\vartheta, \qquad \eta_p = \frac{da}{d\vartheta}\cos\vartheta + \frac{db}{d\vartheta}\sin\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und als Durchmesser des Wendekreises

$$d_w = \sqrt{\left(\frac{dx_p}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dy_p}{d\vartheta}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d\xi_p}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_p}{d\vartheta}\right)^2}.$$

Um die Geschwindigkeiten zu ermitteln, will ich nicht die Zeit selbst einführen, sondern, um von vornherein die Einführung von Maßstabskonstanten zu vermeiden, unter



[1]) Ueber den Hodographen vergl. A. F. Möbius, Die Elemente der Mechanik des Himmels 1843, § 22. — W. R. Hamilton, Proceedings of the Royal Irish Academy 1846, Vol. III, p. 345. Die Elemente der Quaternionen, deutsch von P. Glan, 1882, Bd. I, S. 129, Bd. II, S. 363. — L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik 1888, S. 748 bis 749. — O. Gerlach, Zur Theorie des Hodographen 1889, Diss. Rostock. — H. Alt, Zur Theorie der Geschwindigkeits- u. Beschleunigungspläne einer komplan bewegten Ebene, 1914, Diss. Dresden.

[2]) Hierüber vergl. M. Krause, Analysis der ebenen Bewegung, 1920, S. 1 bis 6.

t eine der Zeit proportionale dimensionslose Größe verstehen. Wählt man dann zur Darstellung der Hodographen ein rechtwinkliges Koordinatensystem $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ mit dem Hodographenpol H als Ursprung (Abb. 3) und bezeichnet man mit $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit der Ebene, so erhält man für die Hodographenbewegung die Gleichungen

$$\mathfrak{x} = \frac{dy}{dt} = \omega\left(\frac{db}{d\vartheta} + \xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta\right);\; \mathfrak{y} = -\frac{dx}{dt} = \omega\left(-\frac{da}{d\vartheta} + \xi\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta\right) \quad (4),$$

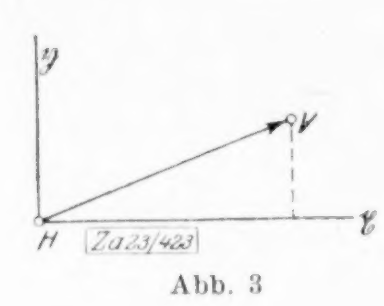


Abb. 3

welche erkennen lassen, daß die Hodographenbewegung ähnlich veränderlich ist und die Aehnlichkeitsfunktion ω besitzt, ferner, daß das Hodographensystem und das entsprechende starre System ähnlich und ähnlich gelegen sind, so daß Verbindungslinien entsprechender Punkte einander parallel sind.

Der Geschwindigkeitszustand der bewegten Ebene ξ, η sei dadurch vorgeschrieben, daß die Hodographen dreier ihrer Punkte $A_1(\xi_1, \eta_1)$, $A_2(\xi_2, \eta_2)$, $A_3(\xi_3, \eta_3)$ durch ihre Gleichungen $f_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$, $f_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$, $f_3(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ gegeben sind. Man setzt dann in diesen Gleichungen für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Werte der Gleichungen (4) ein und benutzt darin für ξ und η die entsprechenden Koordinaten der Punkte A_1, A_2, A_3, so daß man drei Gleichungen erhält, durch welche die Größen ω, $\frac{da}{d\vartheta}$, $\frac{db}{d\vartheta}$ als Funktionen des Bewegungsparameters ϑ bestimmt sind. Durch Integration findet man dann auch a und b in Abhängigkeit von ϑ und kann die Bewegungsgleichungen (1) der Ebene aufstellen, durch die die Bewegung vollständig bestimmt ist.

Als Beispiel möge der Fall erörtert werden, daß die Hodographen der drei Punkte A_1, A_2, A_3 als gerade Linien

$$f_n(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = p_n\mathfrak{x} + q_n\mathfrak{y} - 1 = 0 \qquad (n = 1, 2, 3)$$

gegeben seien. Setzen wir hierin die Ausdrücke (4) für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ein, so ergeben sich die drei Gleichungen

$$\omega\left[p_n\frac{db}{d\vartheta} - q_n\frac{da}{d\vartheta} + (p_n\xi_n + q_n\eta_n)\cos\vartheta + (q_n\xi_n - p_n\eta_n)\sin\vartheta\right] - 1 = 0 \qquad (n = 1, 2, 3).$$

Berechnet man hieraus ω, $\frac{da}{d\vartheta}$, $\frac{db}{d\vartheta}$, so erhält man Ausdrücke von der Form

$$\omega = \frac{1}{k_1\cos\vartheta + k_2\sin\vartheta}$$

$$\frac{da}{d\vartheta} = k_3\cos\vartheta + k_4\sin\vartheta;\quad a = K' + k_3\sin\vartheta - k_4\cos\vartheta$$

$$\frac{db}{d\vartheta} = k_5\cos\vartheta + k_6\sin\vartheta;\quad b = K'' + k_5\sin\vartheta - k_6\cos\vartheta,$$

wobei die Größen K', K'' Integrationskonstante sind, die sich durch eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems x, y beseitigen lassen, und die Konstanten k durch die gegebenen unveränderlichen Größen ausgedrückt werden können. Für die ruhende Polkurve folgt nun

$$\begin{cases} x_p = a - \frac{db}{d\vartheta} = K' + (k_3 - k_6)\sin\vartheta - (k_4 + k_5)\cos\vartheta \\ y_p = b + \frac{da}{d\vartheta} = K'' + (k_4 + k_5)\sin\vartheta - (k_3 - k_6)\cos\vartheta, \end{cases}$$

woraus sich

$$(x_p - K')^2 + (y_p - K'')^2 = (k_3 - k_6)^2 + (k_4 + k_5)^2$$

ergibt. Als Gleichungen der bewegten Polkurve erhält man

$$\begin{cases} \xi_p = \frac{da}{d\vartheta}\sin\vartheta - \frac{db}{d\vartheta}\cos\vartheta = k_4\sin^2\vartheta - k_5\cos^2\vartheta + (k_3 - k_6)\sin\vartheta\cos\vartheta \\ \eta_p = \frac{da}{d\vartheta}\cos\vartheta + \frac{db}{d\vartheta}\sin\vartheta = k_6\sin^2\vartheta + k_3\cos^2\vartheta + (k_4 + k_5)\sin\vartheta\cos\vartheta \end{cases}$$

oder nach Elimination von ϑ

$$\left(\xi_p - \frac{k_4 - k_5}{2}\right)^2 + \left(\eta_p - \frac{k_3 + k_6}{2}\right)^2 = \left(\frac{k_3 - k_6}{2}\right)^2 + \left(\frac{k_4 + k_5}{2}\right)^2.$$

Man erkennt, daß die beiden Polkurven Kreise sind, deren Radien sich wie 2 : 1 verhalten, und daß wir es mit der bekannten Ellipsenschieberbewegung zu tun haben.

Es ist bekannt[1]), daß in dem hier betrachteten Falle, in dem die Hodographen dreier Punkte gerade Linien sind, die Hodographen aller übrigen Punkte der Ebene sich ebenfalls als Gerade ergeben und daß dann das ähnlich veränderliche System der Hodographen einen ruhenden Aehnlichkeitspol H_0 besitzt. Die Bewegung eines ähnlich veränderlichen Systems, bei der der Aehnlichkeitspol ein ruhender Punkt ist, nennt man einförmig[2]). Bei dieser Bewegung sind alle Bahnkurven (Hodographenkurven) ähnlich und ähnlich gelegen. Im Hodographensystem ist der ruhende Aehnlichkeitspol H_0 der zu einem Punkte entartete Hodograph desjenigen Punktes A_0 der bewegten Ebene, der sich gleichförmig geradlinig bewegt, denn während der ganzen Bewegung bleibt der Geschwindigkeitsvektor HH_0 dieses Punktes A_0 unverändert.

Die Punkte H_0 und A_0 lassen sich hier in folgender Weise ermitteln. Gegeben seien die Punkte A_1, A_2, A_3 der bewegten Ebene und ihre geradlinigen Hodographen h_1, h_2, h_3 mit dem Hodographenpol H (Abb. 4 a und 4 b). Infolge der hier überall geltenden Aehnlichkeitsbeziehungen bilden die Fußpunkte F_1, F_2, F_3 der von H_0 auf h_1, h_2, h_3 gefällten Lote ein Dreieck, das dem Dreiecke A_1, A_2, A_3 ähnlich ist. Sind α_{12}, α_{13}, α_{23} die Winkel zwischen h_1, h_2, h_3, so zeichnen wir die drei Kreise, die durch zwei der Punkte A_1, A_2, A_3 gehen und den entsprechenden der Winkel α_{12}, α_{13}, α_{23} als Peripheriewinkel besitzen. Diese Kreise schneiden sich im Punkte A_0, der daher als Schnittpunkt zweier Kreise bestimmt ist. Durch A_1, A_2, A_3 ziehen wir Senkrechte zu den Verbindungslinien mit A_0 und erhalten hierdurch ein Dreieck mit den Winkeln α_{12}, α_{13}, α_{23}, dessen Eckpunkte E_1, E_2, E_3 auf den erwähnten Kreisen liegen. Ueberträgt man dann aus dem Dreieck E_1, E_2, E_3 den Punkt A_0 als ähnlich gelegenen Punkt entsprechend in das Dreieck der Hodographengeraden h_1, h_2, h_3, so erhält man den Punkt H_0. Die auf diese Weise ermittelten Punkte A_0 und H_0 haben die Eigenschaft, daß sich der Punkt A_0 der bewegten Ebene mit der konstanten Geschwindigkeit HH_0 auf einer der Geraden HH_0 parallelen Geraden bewegt. Wir können sagen: Wird im Ellipsenschiebergetriebe einer der geradlinig bewegten Punkte mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, so sind die Hodographen aller übrigen Punkte gerade Linien.

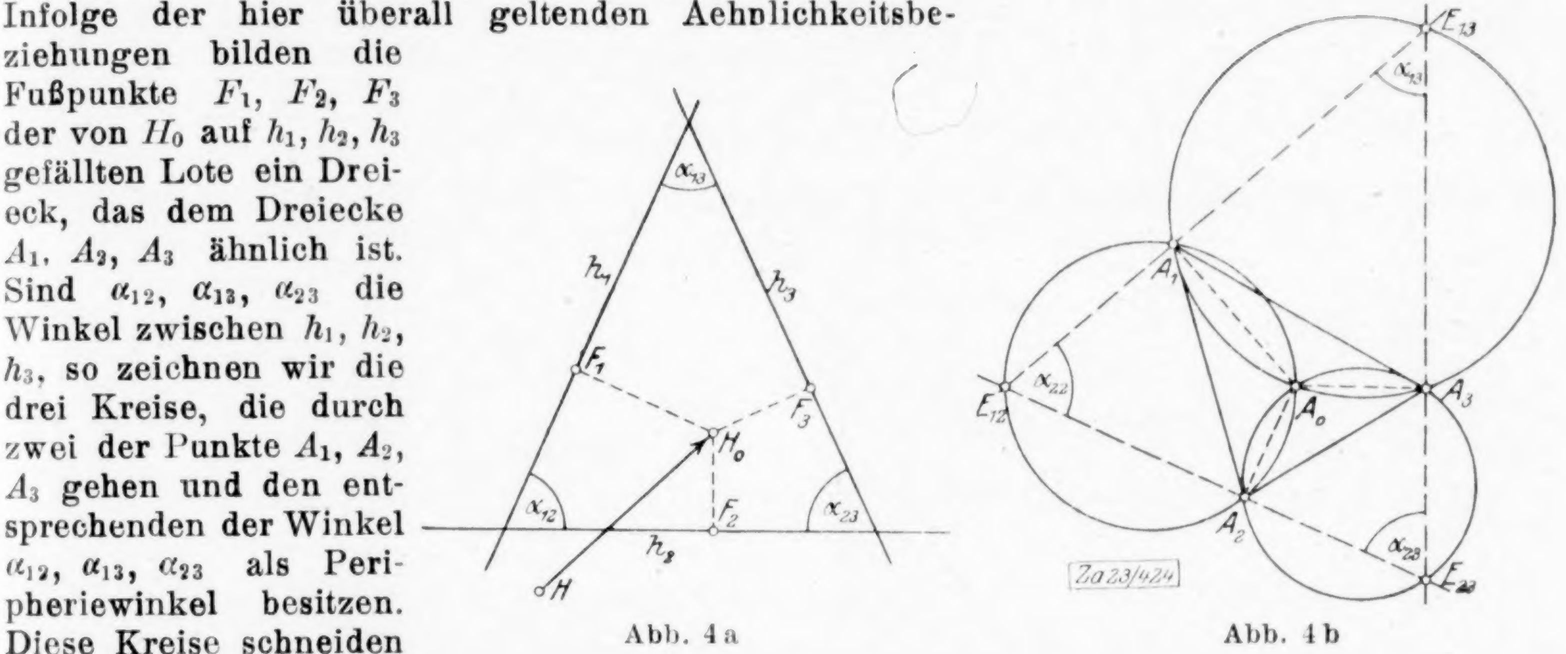


Abb. 4 a Abb. 4 b

Bei der erwähnten einförmigen Hodographenbewegung, bei der ein Punkt A_0 der bewegten Ebene sich gleichförmig geradlinig bewegt und bei der alle Hodographen ähnliche und ähnlich gelegene Kurven mit dem gemeinsamen Aehnlichkeitspol H_0 sind, besteht zwischen den Hodographen und der bewegten Polkurve die geometrische Verwandtschaft der Inversion[3]). Wenn also bei der einförmigen Hodographenbewegung die Hodographen sämtlich Gerade oder Kreise sind, so ist die bewegte Polkurve ein Kreis.

Als weiteres Beispiel soll der Fall behandelt werden, daß ein Punkt A_0 sich gleichförmig geradlinig bewegt und daß der Hodograph eines zweiten Punktes ein Kreis ist. Dann sind, wie schon erwähnt wurde, die Hodographen aller Punkte ähnliche und ähnlich gelegene Kreise und infolge der Inversionsbeziehung ist auch die bewegte Polkurve ein Kreis. Da jeder Punkt der Hodographenebene Mittelpunkt eines der Hodographenkreise ist, so ist auch der Hodographenpol H Mittelpunkt eines solchen Kreises.

[1]) Hierüber vergl. L. Burmester, a. a. O., S. 877.

[2]) Hierüber vergl. L. Burmester, a. a. O., S. 867 bis 870. — M. Krause, a. a. O., S. 197 bis 204. — H. Alt, a. a. O. S. 34 bis 48.

[3]) Hierüber vergl. H. Alt, a. a. O., S. 35.

Hieraus folgt, daß außer dem Punkte A_0 noch ein und zwar nur ein Punkt vorhanden ist, der konstante Geschwindigkeit besitzt.

Eine besondere Beachtung verdient der Fall, daß allgemein zwei Punkte der bewegten Ebene konstante Geschwindigkeit haben. Man kann hier so vorgehen, daß man bei dem angegebenen analytischen Verfahren zwei Hodographen als konzentrische Kreise um den Hodographenpol als gegeben annimmt. Einfacher und allgemeiner kommt man jedoch durch die folgende geometrische Ueberlegung zum Ziel. Es möge die allgemeinere Fragestellung erörtert werden: Welches ist die bewegte Polkurve bei derjenigen Bewegung, bei der zwei Punkte A_1 und A_2 der bewegten Ebene ein konstantes Geschwindigkeitsverhältnis $\varkappa$ besitzen? Verbindet man A_1 und A_2 mit dem augenblicklichen Drehpol P (Abb. 5), so erkennt man, daß sich die Entfernungen $A_1 P = e_1$ und $A_2 P = e_2$ wie die entsprechenden Geschwindigkeiten verhalten. Infolgedessen müssen die Punkte der bewegten Polkurve die Eigenschaft haben, daß ihre Entfernungen von zwei gegebenen Punkten A_1 und A_2 der bewegten Ebene ein vorgeschriebenes konstantes Verhältnis $\varkappa$ haben. Als bewegte Polkurve ergibt sich daher ein Kreis, dessen Durchmesser d durch A_1 und A_2 im Verhältnis $\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}$ harmonisch geteilt wird und die Größe $d = e \frac{2\varkappa}{1-\varkappa^2}$ hat, wenn $e = A_1 A_2$ ist. Man findet also: Ist die bewegte Polkurve ein Kreis, so haben alle Punktepaare der bewegten Ebene, die einen Durchmesser dieses Kreises harmonisch teilen, ein konstantes Geschwindigkeitsverhältnis. Ferner: Ist die bewegte Polkurve ein Kreis und hat irgend ein Punkt der bewegten Ebene konstante Geschwindigkeit, so existiert stets ein und zwar nur ein zweiter Punkt, der ebenfalls konstante Geschwindigkeit besitzt.

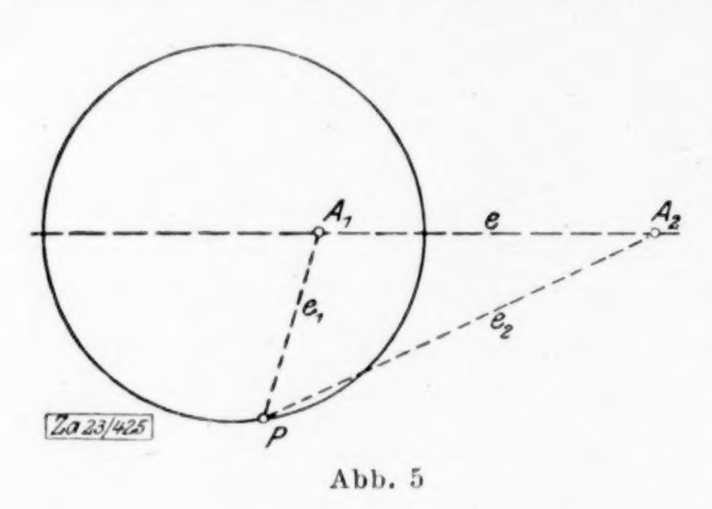


Abb. 5

2. Zeichnerisches Verfahren. Das angegebene analytische Verfahren führt schon in verhältnismäßig einfachen Fällen zu sehr umständlichen Rechnungen, bei denen die zur Ermittlung der Größen a und b erforderlichen Integrationen nur selten durchführbar sind. Dazu kommt, daß in vielen Fällen damit gerechnet werden muß, daß die drei gegebenen Hodographen nicht durch ihre Gleichungen, sondern nur graphisch vorgelegt und mathematisch nicht definiert sind. Infolgedessen erscheint hier die Ausbildung eines zeichnerischen Verfahrens zur Lösung der Aufgabe notwendig.

Gegeben sind wieder die drei Punkte $A_1, A_2\, A_3$ der bewegten Ebene und ihre Hodographen h_1, h_2, h_3 mit dem Hodographenpol H (Abb. 6). Dann sind zunächst die Gruppen von einander entsprechenden Hodographenpunkten V_1, V_2, V_3 zu ermitteln und zwar so, daß die Dreiecke $V_1 V_2 V_3$ immer dem gegebenen Dreieck $A_1 A_2 A_3$ ähnlich sind. Wir wählen auf h_1 einen beliebigen Punkt V_1 und auf h_2 eine Reihe von Punkten $V_2', V_2'', \ldots$ und konstruieren entsprechende Punkte $V_3'\, V_3'', \ldots$ als dritte Eckpunkte von Dreiecken $V_1 V_2' V_3'$ bezw. $V_1 V_2'' V_3''$ usf., die dem Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ ähnlich sind. Durch die auf diese Weise gefundenen Punkte $V_3', V_3'', \ldots$ legen wir eine Kurve, welche die Hodographenkurve h_3 in dem Punkte V_3 schneidet, der dem Punkte V_1 entspricht. Der zugehörige Punkt V_2 wird dann als dritter Eckpunkt eines dem Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ ähnlichen Dreiecks $V_1 V_2 V_3$ gefunden, wobei sich zur Kontrolle zeigen muß, daß V_2 auf h_2 liegt. In dieser Weise finden wir zu jedem Punkte V_1 die entsprechenden Punkte V_2 und V_3.

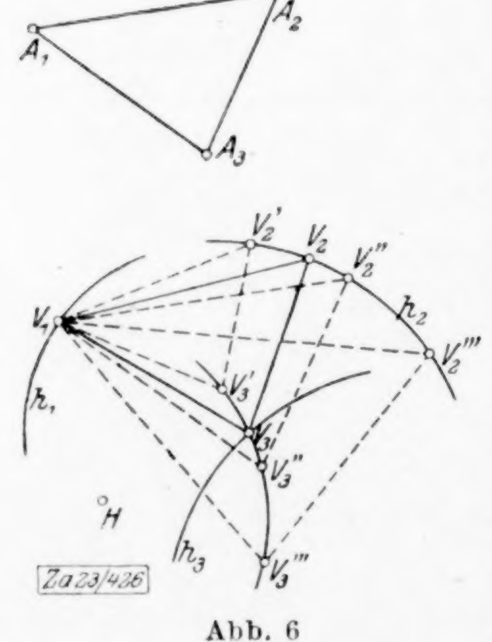


Abb. 6

Zu jeder Gruppe entsprechender Hodographenpunkte V_1, V_2, V_3 läßt sich nun der entsprechende Punkt P der bewegten Polkurve ermitteln. Wir verbinden H mit V_1, V_2, V_3 und konstruieren ein dem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ kongruentes Dreieck $(A_1)(A_2)(A_3)$ derart, daß (A_1) auf HV_1, A_2 auf HV_2, A_3 auf HV_3 liegt und entsprechende Seiten der Dreiecke

$V_1 V_2 V_3$ und $(A_1)(A_2)(A_3)$ parallel sind (Abb. 7a). Die Eigenschaft, daß die beiden Vierecke $(A_1)(A_2)(A_3)$ H und $A_1 A_2 A_3$ P kongruent sind, liefert in der bewegten Ebene den Momentanpol P (Abb. 7b). Hiernach finden wir punktweise die bewegte Polkurve.

Um die ruhende Polkurve zu ermitteln, legen wir in der bewegten Ebene die ξ-Achse durch A_1 und A_2 und die η-Achse durch A_1 (Abb. 8a). Da $A_1 A_2$ der entsprechenden Hodographengeraden $V_1 V_2$ immer parallel ist, so schließt im Hodographensystem $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ die Gerade $V_1 V_2$ mit der x-Achse, die für die Konstruktion noch willkürlich gewählt werden kann, den Winkel ϑ ein, den die ξ-Achse mit der x-Achse bildet (Abb. 8b und 8c). Wir gehen nun so vor, daß wir eine Gruppe entsprechender Punkte V_1, V_2, V_3 (im $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$-System) und P (im ξ, η-System) herausgreifen und in der angegebenen Weise den Winkel ϑ ermitteln. In der ξ, η-Ebene ziehen wir unter dem Winkel $180^\circ - \vartheta$ gegen die ξ-Achse eine Gerade (Abb. 8a), und fällen auf diese von P das Lot PF. Dann ist

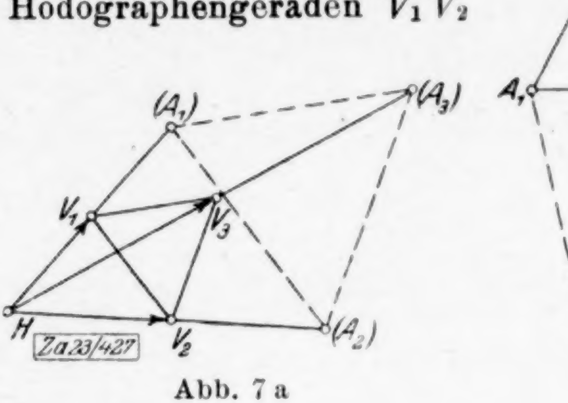


Abb. 7a

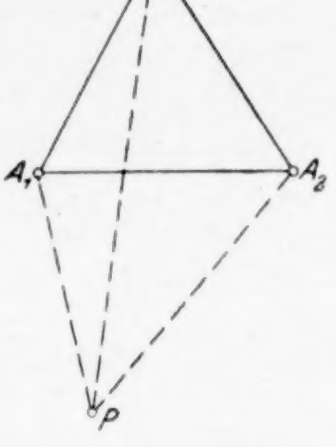


Abb. 7b

$$PF = \xi_p \sin\vartheta + \eta_p \cos\vartheta = \frac{da}{d\vartheta}, \qquad AF = -\xi_p \cos\vartheta + \eta_p \sin\vartheta = \frac{db}{d\vartheta}.$$

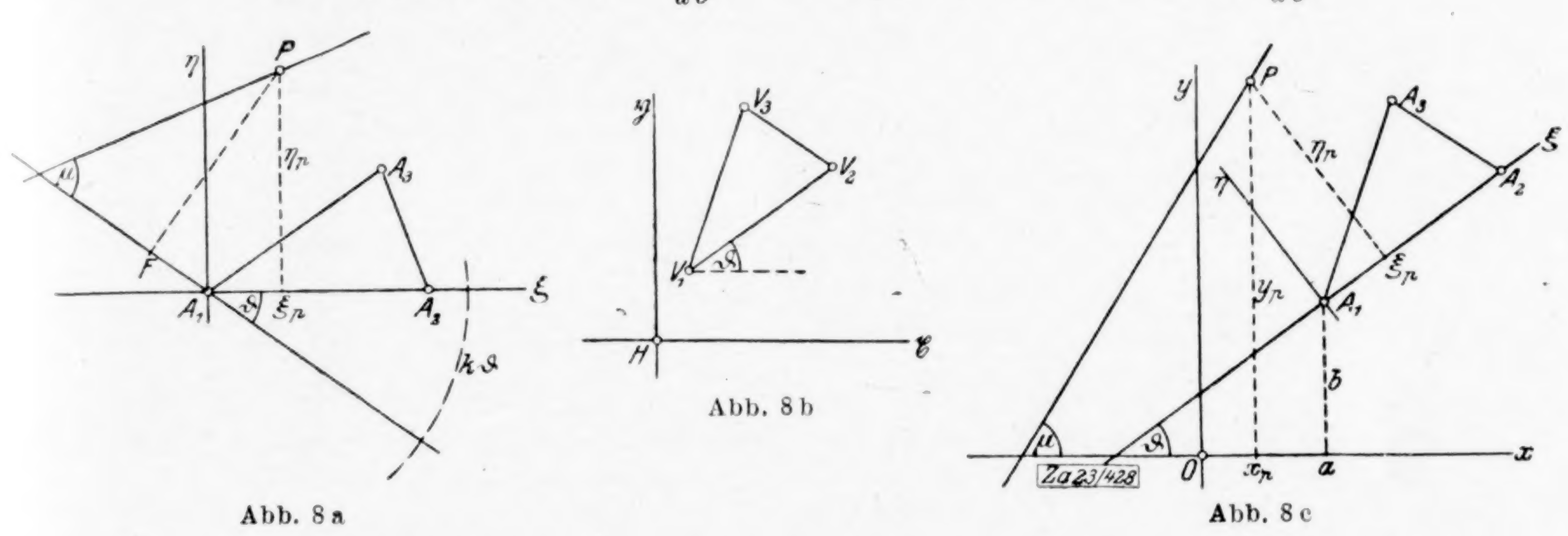


Abb. 8a

Abb. 8b

Abb. 8c

Aus diesen Größen ermitteln wir durch graphische Integration a und b. Zu diesem Zwecke tragen wir in einem rechtwinkligen Koordinatensystem als Abszissen die Strecken $k\vartheta$ auf, d. h. die Bogenlängen eines mit dem willkürlich gewählten Radius k um A_1 (Abb. 8a,) geschlagenen Kreises, und als Ordinaten die zugehörigen Werte $\frac{da}{d\vartheta}$ bezw. $\frac{db}{d\vartheta}$ (Abb. 9). Es ergeben sich Flächenstreifen, die der Ordinatenachse parallel sind und deren Größe $f_1, f_2, \ldots$ zahlenmäßig berechnet wird. Für einen beliebigen Punkt P_n ist dann

$$a_n = \frac{1}{k}(f_1 + f_2 + \ldots f_n).$$

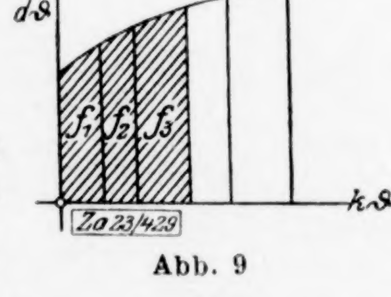


Abb. 9

Hat man in dieser Weise für eine Anzahl von Punkten die Werte a und b berechnet, so bildet man die Koordinaten $x_p = a - \frac{db}{d\vartheta}$, $y_p = b + \frac{da}{d\vartheta}$ der ruhenden Polkurve, trägt sie in das Koordinatensystem x, y ein und erhält damit punktweise die ruhende Polkurve. Man kann auch so vorgehen, daß man in der x, y-Ebene (Abb. 8c), mit Hilfe der Größen a, b, ϑ das ξ, η-System in seiner augenblicklichen Lage festlegt und in ihm aus Abb. 8a den vorher konstruierten Punkt P der bewegten Polkurve einträgt. Es empfiehlt sich, die bewegte Polkurve, die sich sehr einfach konstruieren läßt, durch möglichst viele Punkte zu bestimmen, so daß man in jedem Punkte auch die entsprechende Tangente einzeichnen kann, die mit $A_1 F$ (Abb. 8a), den Winkel μ bilden möge. Man kann dann auch die entsprechende Tangente der ruhenden Pol-

kurve angeben, indem man unter dem Winkel μ gegen die x-Achse durch den entsprechenden Punkt P der ruhenden Polkurve eine Gerade zieht. Da sich diese Tangenten verhältnismäßig einfach und genau konstruieren lassen, kommt man bei der ruhenden Polkurve mit der Ermittlung einer geringen Zahl von Punkten aus.

Die Bahnen aller Punkte der bewegten Ebene lassen sich nun auch angeben. Sind $P', P'', \ldots$ Punkte der bewegten und $(P'), (P''), \ldots$ die entsprechenden Punkte der ruhenden Polkurve, so schlägt man, um die Bahn eines Punktes A zu erhalten, um $(P'), (P''), \ldots$ mit $AP', AP'', \ldots$ Kreise, deren Einhüllende die gesuchte Bahn ist.

Nun sind noch die Beschleunigungen und der Wendekreis zu ermitteln. Wir kennen die Richtungen der Beschleunigungen der Punkte A_1, A_2, A_3, da die Beschleunigungen den Hodographennormalen parallel sind. Wir greifen eine bestimmte Momentanlage heraus und legen durch A_1, A_2, A_3 die entsprechenden Beschleunigungsstrahlen, die sich in S_{12}, S_{13}, S_{23} schneiden mögen (Abb. 10). Wir ermitteln nun den Beschleunigungspol B, d. h. denjenigen Punkt der Ebene, der augenblicklich keine Beschleunigung besitzt, indem wir die Eigenschaft benutzen, daß seine Verbindungslinien mit den Punkten der Ebene mit den entsprechenden Beschleunigungsrichtungen gleiche Winkel σ einschließen, wobei $\operatorname{tg} \sigma = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ ist (ε = Winkelbeschleunigung der Ebene). Infolgedessen erhalten wir B als gemeinsamen Schnittpunkt der drei Kreise durch A_1, A_2, S_{12} bezw. A_1, A_3, S_{13} bezw. $A_2 A_3 S_{23}$. Da die Verbindungslinie BP mit dem durch P gehenden Wendekreisdurchmesser ebenfalls den nunmehr bestimmten Winkel σ einschließt, so können wir den Wendekreisdurchmesser d_w und auch den Wendekreis selbst zeichnen, da dieser durch B und P geht. Dadurch finden wir zugleich nochmals die Polkurventangente als Senkrechte zu d_w.

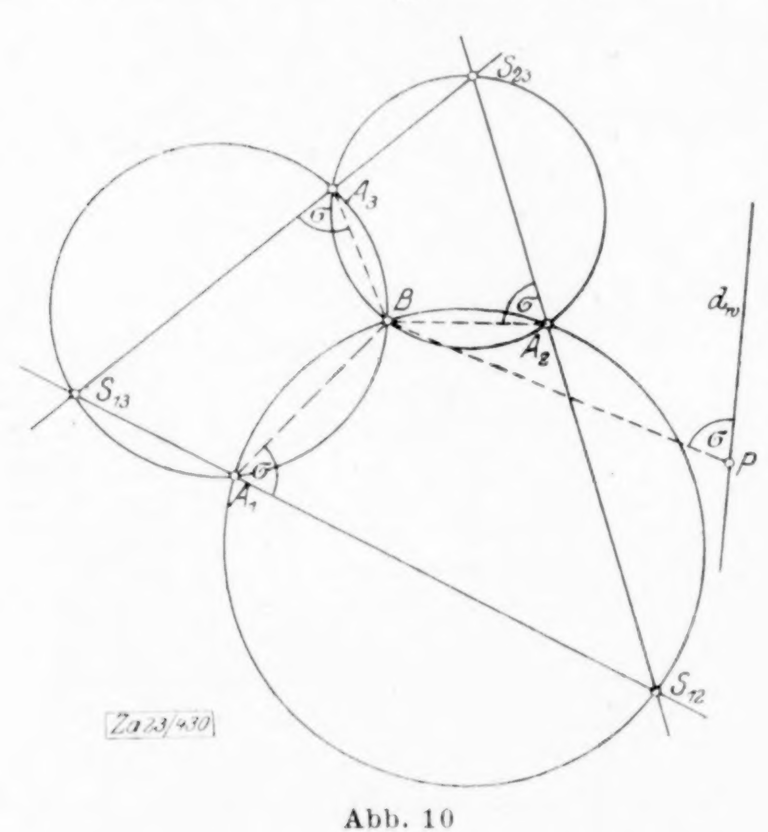


Abb. 10

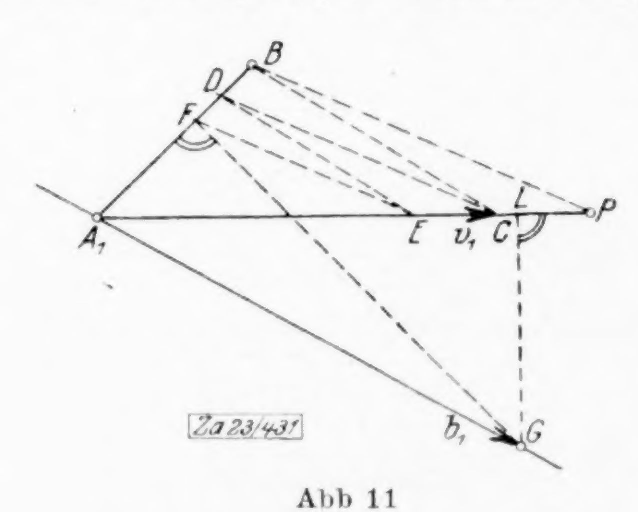


Abb 11

Um die Beschleunigung b_1 des Punktes A_1 zu finden, verbinden wir A_1 mit P und B und es sei $A_1 P = r_1$, $A_1 B = e_1$ (Abb. 11). Die Beschleunigung b_1, von der wir zunächst nur die der Hodographennormalen parallele Richtung kennen, ist die Resultierende zweier zueinander senkrechter Komponenten, von denen die eine von A_1 nach B gerichtet ist und die Größe $e_1 \omega^2$ hat, während die andere die Größe $e_1 \varepsilon$ besitzt. Aus der aus dem Hodographen h_1 zu entnehmenden Geschwindigkeit $v_1 = r_1 \omega$ des Punktes A_1 können wir zunächst $r_1 \omega^2$ und daraus $e_1 \omega^2$ ermitteln. Durch den Endpunkt C des Geschwindigkeitsvektors $A_1 C = v$ ziehen wir zu PB die Parallele CD, durch D die Parallele DE zu BC und durch E die Parallele EF zu PB. Dann ist $A_1 E = r_1 \omega^2$ und $A_1 F = e_1 \omega^2$. Ziehen wir nun durch F zu $A_1 F$ die Senkrechte, so schneidet diese die schon bekannte Beschleunigungsrichtung des Punktes A_1 im Endpunkte G des gesuchten Beschleunigungsvektors $A_1 G = b_1$ und es ist $FG = e_1 \varepsilon$. Das von G auf $A_1 P$ gefällte Lot GL bestimmt die Normalbeschleunigung $A_1 L = b_{1n} = \frac{v_1^2}{\varrho}$, aus der in bekannter Weise der Krümmungsmittelpunkt ϱ der Bahn des Punktes A_1 gefunden werden kann. Da die Beschleunigungskomponenten $A_1 F = e_1 \omega^2$ und $FG = e_1 \varepsilon$ dem Abstande vom Beschleunigungspol B proportional sind, so kann man sie für jeden Punkt der Ebene durch Ziehen von Parallelen konstruieren und damit die Beschleunigungen aller Punkte der Ebene finden.

Zum Schluß sollen einige allgemeine Bemerkungen über die Genauigkeit des angegebenen zeichnerischen Verfahrens gebracht werden, da dessen praktische Brauchbarkeit wesentlich von der erreichbaren Genauigkeit abhängt. Bei der Ermittlung der Hodographendreiecke $V_1 V_2 V_3$ nach Abb. 6 kann eine Ungenauigkeit insofern auftreten, als die Kurve der Punkte V_3' den Hodographen h_3 zu spitz schneidet. In diesem Falle kann man sich dadurch helfen, daß man nicht von V_1, sondern von V_2 oder V_3 ausgeht. Die bewegte Polkurve findet man sehr genau und zwar deshalb, weil jeder Punkt als Schnittpunkt dreier Geraden gefunden wird und weil alle Punkte unabhängig voneinander sich ergeben, so daß etwaige Ungenauigkeiten beim Zeichnen der Polkurve bemerkt und korrigiert werden können. Da man auch nachträglich noch beliebig viele Zwischenpunkte ohne große Mühe einschieben kann, so lassen sich mit recht guter Genauigkeit auch die Polkurventangenten zeichnen, die für die Ermittlung der ruhenden Polkurve von Wert sind. Bei dieser ist die wesentlichste Fehlerquelle die graphische Integration nach Abb. 9 und der Umstand, daß die einzelnen Punkte nicht völlig unabhängig voneinander gefunden werden. Die einzelnen Diagrammpunkte der Abb. 9 ergeben sich noch sehr genau und sind, was wesentlich ist, unabhängig voneinander, aber etwaige hierbei auftretende Fehler beeinflussen die Genauigkeit nicht nur eines Punktes, sondern aller folgenden Punkte der ruhenden Polkurve. Man kann sich hier dadurch helfen, daß man die Abszissenkonstante k möglichst groß wählt. Dann wird die Diagrammkurve flach und läßt sich sehr genau zeichnen, ferner lassen sich ungenaue Diagrammpunkte sofort erkennen und nachprüfen. Eine weitere Kontrolle ist dadurch möglich, daß man mit Hilfe eines Planimeters die gesamte Diagrammfläche ausmißt, die dann gleich der Summe der berechneten Einzelflächen $f_1, f_2, \ldots$ sein muß.

Bei der Ermittlung des Beschleunigungspoles, des Wendekreises und der Beschleunigungen liegt die Hauptfehlerquelle in der Verwendung der Hodographennormalen, die immer nur mit einer gewissen Annäherung angegeben werden können. Dieser Umstand ist deshalb nicht von Bedeutung, weil die Beschleunigungen in der Regel nicht mit großer Genauigkeit verlangt werden. Auch kann man, da die Bahn des Punktes A_1 sehr genau gefunden wird, die Beschleunigung noch mit Hilfe der Grüblerschen Konstruktion[1]) ermitteln und damit die erste Konstruktion besonders in denjenigen Fällen nachprüfen, in denen die Genauigkeit etwa durch spitze Schnitte wesentlich beeinträchtigt ist.

Dresden, Oktober 1923. 359

Über die Messung großer Wärmemengen in turbulenten Gasströmen.

Von **ALFRED SCHACK** in Düsseldorf.

In der industriellen Praxis ist es häufig notwendig, die Wärmemengen zu messen, die Flüssigkeitsströme und insbesondere Gasströme in Rohrleitungen mit sich führen. Wenn es auch bis heute keineswegs möglich ist, diese mit der wünschenswerten Genauigkeit zu messen, sobald der Strom sich noch nicht »beruhigt« hat, d. h. sobald noch nicht ein zeitlich unveränderliches turbulentes Geschwindigkeitsfeld im Strömungsquerschnitt erreicht ist, so ist es doch schon möglich, für den Fall des konstanten turbulenten Strömungsfeldes[2]), das nach Durchströmen einer verhältnismäßig langen, geraden »Beruhigungsstrecke« eintritt, die Größe der zu erwartenden Meßfehler mit gewissen Vorbehalten anzugeben und ferner Anhaltspunkte für eine beliebig genaue Messung zu liefern.

Der folgenden Untersuchung legen wir zwei Annahmen zu grunde, die v. Kármán[3]) in neuerer Zeit unter Benutzung von Forschungsergebnissen Prandtls aufgestellt und begründet hat. Gleichzeitig wird dann aus den Ergebnissen die Möglichkeit hervorgehen, diese beiden Annahmen rückwärts nachzuprüfen.

---

[1]) M. Grübler, Getriebelehre 1917, S. 51 bis 52. — H. Alt, a. a. O., S. 62 bis 63 u. S. 65.

[2]) Gemeint ist hier und im folgenden die Unveränderlichkeit im statistischen Sinne, also ohne Rücksicht auf die sich im ganzen aufhebenden Momentabweichungen der Feldkomponenten vom zeitlichen Mittelwert.

[3]) Diese Zeitschrift 1, 1921, S. 233, »Ueber laminare und turbulente Reibung«.

Im folgenden ist:

Q die durch den Querschnitt strömende Wärmemenge in kcal/h,
V das durch den Rohrquerschnitt strömende Gasvolumen in m^3/h,
c_p die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Druck in kcal/kg °C,
t_Q die mittlere »Querschnittstemperatur« des Gasstromes in °C,
t_G die mittlere wahre Temperatur des Gasstromes in °C,
t_R die konstante Temperatur der Rohrwand in °C,
t_A » » » in der Rohrachse in °C,
t die veränderliche Temperatur in der Entfernung r von der Achse,
u die veränderliche Geschwindigkeit des Stromes in der Entfernung r von der Rohrachse in m/s,
u_{max} die konstante Geschwindigkeit in der Rohrachse in m/s,
R der innere Rohrhalbmesser in m,
γ das spezifische Gewicht in kg/m^3.

Die erste Annahme v. Kármáns bezieht sich auf die Geschwindigkeitsverteilung im Querschnitt und lautet:

$$u = u_{max}\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2}\right)^{1/7} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Die zweite Annahme, die hauptsächlich auf theoretische Erwägungen Prandtls zurückgeht, sagt aus, daß das Temperaturfeld in einer beruhigten turbulenten Strömung dem Geschwindigkeitsfeld geometrisch ähnlich ist, wenn die Flüssigkeit wärmer als die Rohrwand ist. So überraschend diese Annahme klingt, ist sie doch nicht unbegründet und besitzt auch praktisches Interesse. H. Latzko[1]) hat darauf z. B. eine Theorie der Wärmeübergangszahlen aufgebaut und ist zu Ergebnissen gekommen, die mit den Nusseltschen[2]) Untersuchungen im Wesentlichen übereinstimmen. Wir gehen noch einen kleinen Schritt weiter, indem wir diese Aehnlichkeit zwischen den Feldern auch für den Fall $t_A < t_R$ insofern voraussetzen, als das radiale Temperaturgefälle im Strom beide Male durch einen Ausdruck darstellbar sein soll, der sich nur durch das Vorzeichen und konstante Faktoren von dem ersten unterscheidet. Die Rechnung ergibt dann, daß die Ausdrücke für das radiale Temperaturgefälle im Gasstrom[3]) identisch sind, gleichgültig, ob der Unterschied $t_R - t_A$ positiv oder negativ ist.

Wegen der Aehnlichkeit des Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes dürfen sich die Differentialquotienten entsprechender Komponenten der Feldgleichungen nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden; es muß also gelten:

$$\frac{dt}{dr} = k\,\frac{du}{dr} \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Wegen Gl. (1) wird also

$$\frac{dt}{dr} = k_1\, r\,(R^2 - r^2)^{-6/7} \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

wobei k_1 ein neuer Festwert ist, und somit nach Integration

$$t = C_1\,(R^2 - r^2)^{1/7} + C_2 \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Hierbei sind in C_1 alle auftretenden unveränderlichen Faktoren zusammengefaßt; C_2 ist die Integrationskonstante, die an sich noch eine Zeitfunktion enthalten darf. Diese Zeitfunktion wird aber zu einem Festwert, da wir das Strömungs- und Temperaturfeld unabhängig von der Zeit, d. h. den Beharrungszustand voraussetzen. Die Festwerte C_1 und C_2 ergeben sich aus den Grenzbedingungen, nämlich

$$t = t_R \text{ für } r = R, \qquad t = t_A \text{ für } r = 0$$

zu

$$C_2 = t_R, \qquad C_1 = (t_A - t_R)\,R^{-2/7}.$$

Damit gilt für das Temperaturfeld in turbulenter, beruhigter Strömung

$$t = (t_A - t_R)\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2}\right)^{1/7} + t_R \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

[1]) Diese Zeitschrift, 1, 1921, S. 268, »Wärmeübergang an einen turbulenten Flüssigkeits- oder Gasstrom«.

[2]) Zeitschr. Ver. deutsch. Ing., 1917, S. 685, »Der Wärmeübergang im Rohr«.

[3]) Sämtliche Rechnungen und Angaben gelten sowohl für tropfbare Flüssigkeiten als auch für Gase. Es wird sich jedoch herausstellen, daß die Ergebnisse nur für Gase praktisch wichtig sind.

unabhängig davon, ob die Temperatur der Rohrwand höher oder niedriger als die des Gases ist. Dagegen ist dieser Unterschied nicht gleichgültig für die durch den Rohrquerschnitt stündlich beförderte Wärmemenge, und wir werden sogleich sehen, daß diese in den beiden Fällen $t_R > t_A$ und $t_R < t_A$ merklich verschieden ist, auch wenn es sich in beiden Fällen um dasselbe Rohr und dasselbe Gas handelt und das Gas in beiden Fällen die gleiche Strömungsgewindigkeit und die gleiche mittlere Querschnitttemperatur t_Q hat. Wenn man nämlich das Produkt von Geschwindigkeit und Temperatur der einzelnen Elemente des Querschnitts F, also das Integral $k \int u \cdot t \cdot dF$, bildet, so ergibt sich, daß diejenige Strömung die größere Wärmemenge durch den Querschnitt befördert, deren Temperaturhöchstwert in der Rohrachse liegt, da es in diesem Falle mit dem Geschwindigkeitshöchstwert zusammenfällt. Dagegen kommt im anderen Falle der Temperaturhöchstwert an der Rohrwand nicht zur vollen Wirkung, weil dort ja die Geschwindigkeit u klein oder 0 ist. Wie auch von den sogleich folgenden Rechnungen bestätigt wird, geht also unter denselben Verhältnissen durch dasjenige Rohr die größere Wärmemenge, welches kälter als die darin strömende Flüssigkeit ist.

Durch ein Flächenelement von der Größe dF strömt in der Zeiteinheit die Wärmemenge

$$dQ = c_p \, \gamma \, t \, u \, dF \qquad (6).$$

Setzen wir ein kreisförmiges Rohr mit $dF = 2\pi \, r \, dr$ voraus, so wird also

$$Q = 2\pi \, c_p \, \gamma \int_0^R t \, u \, r \, dr \qquad (7),$$

wenn R der innere Rohrhalbmesser und r der Abstand des Ringes dF von der Achse ist.

In der Praxis wird nun im allgemeinen so verfahren, daß für t und u mittlere Werte t_Q und u_Q gemessen werden, so daß man auch setzen kann

$$Q = 2\pi \, c_p \cdot \gamma \cdot t_Q \cdot u_Q \int_0^R r \, dr \quad (7\,\mathrm{a}) \qquad \text{und} \qquad Q = R^2 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot c_p \cdot t_Q \cdot u_Q \quad (7\,\mathrm{b}),$$

t_Q ist nach häufig vertretener Auffassung die mittlere Querschnittstemperatur[1]) des Stromes, also

$$t_Q = \frac{2\pi \int_0^R t \, r \, dr}{R^2 \pi} \qquad (8).$$

Die mittlere Geschwindigkeit u_Q im Querschnitt ergibt sich zu

$$u_Q = \frac{2 \int_0^R u \, r \, dr}{R^2 \pi} \qquad (9).$$

Während u_Q bei der Verwendung in Gl. (7a) richtige Werte ergibt, ist dies bei Gl. (8) nicht der Fall. Dies ergibt sich auf folgendem Wege.

Die durch (3) gegebene Wärmemenge Q muß andererseits, vorerst ohne Rücksicht auf die mathematische Form der mittleren Temperatur, durch die Beziehung

$$Q = V \gamma \, c_p \, t_G \ \mathrm{kcal/h} \qquad (10)$$

gegeben sein, wobei V das stündlich durch den Querschnitt gehende Gasvolumen und t_G die einzusetzende mittlere Gastemperatur ist. Nun ist

$$V = 2\pi \int_0^R u \, r \, dr$$

und so ergibt sich durch Zusammenfassen von Gl. (10) und (7)

$$t_G = \frac{\int_0^R t \, u \, r \, dr}{\int_0^R u \, r \, dr} \qquad (11),$$

also ein wesentlich anderer Ausdruck als der für die mittlere Querschnittstemperatur t_Q. Die stündlich durch den Rohrquerschnitt gehende wahre Wärmemenge ergibt sich somit an Stelle von Gl. (7b) zu

$$Q = R^2 \, \pi \, \gamma \, c_p \, t_G \, u_Q \ \mathrm{kcal/h} \qquad (12).$$

[1]) Auf den Unterschied zwischen der mittleren Querschnittemperatur und der wahren Gastemperatur hat zuerst Gröber, »Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeübergangs« aufmerksam gemacht (Springer 1921).

Eine Messung der Temperatur in Wärmeströmen wird sich in der Praxis im allgemeinen nur auf die Ermittlung der Temperatur eines einzigen Punktes im Strömungsquerschnitt erstrecken, seltener auf die Ermittlung der Querschnittemperatur t_Q, etwa mit einem über den ganzen Querschnitt reichenden Widerstandsthermometer, und fast niemals auf die Ermittlung der wahren Gastemperatur, die nur mit besonderen Schwierigkeiten ausführbar ist.

Wir wollen daher untersuchen, wie groß die Abweichungen der Wärmemengen Q sind, wenn man einmal die wahre Gastemperatur t_G und einmal die mittlere Querschnitttemperatur t_Q mißt, und ferner, ob und wo es einen Punkt im Strömungsquerschnitt gibt, an dem man unmittelbar die richtige Temperatur t_G messen kann.

Offenbar sind die Abweichungen der Wärmemengen Q voneinander wegen Gl. (7 b) und (12) direkt proportional den Abweichungen von t_Q und t_G. Wir können uns daher darauf beschränken, nur die Abweichungen der Temperatur t_Q und t_G voneinander zu bestimmen. Nach Gl. (8) ist die mittlere Querschnittemperatur des Gasstromes

$$t_Q = \frac{2}{R^2} \cdot \int_0^R t\, r\, d r$$

oder, wenn man t aus Gl. (5) einsetzt und die Konstanten vor das Integral zieht

$$t_Q = \frac{2\,(t_A - t_R)}{R^{16/7}} \int_0^R (R^2 - r^2)^{1/7}\, r\, d r + \frac{2\, t_R}{R^2} \int_0^R r\, d r \quad \ldots \ldots \quad (13).$$

Die Integration ergibt schließlich

$$t_Q = {}^7/_8\, t_A + {}^1/_8\, t_R \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14).$$

Setzt man in gleicher Weise in Gl. (11) die Ausdrücke für t aus Gl. (5) und u aus Gl. (1) ein, so ergibt sich nach Kürzung von u_{max} und R^2 für die wahre Gastemperatur

$$t_G = \frac{\int_0^R \left[(t_A - t_R) \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2} \right)^{1/7} + t_R \right] (R^2 - r^2)^{1/7}\, r\, d r}{\int_0^R (R^2 - r^2)^{1/7}\, r\, d r} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

und schließlich nach Ausführung der Integration

$$t_G = {}^8/_9\, t_A + {}^1/_9\, t_R \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16).$$

Bei der Integration der Gl. (13) und (15) treten besonders folgende Integrale auf:

$$\int_0^R (R^2 - r^2)^{1/7}\, r\, d r = {}^7/_{16}\, R^{16/7} \qquad \text{und} \qquad \int_0^R (R^2 - r^2)^{2/7}\, r\, d r = {}^7/_{18}\, R^{18/7}.$$

Nunmehr können wir die gesuchte Abweichung zwischen t_Q und t_G finden. Aus Gl. (14) und (16) ergibt sich

$$t_G - t_Q = {}^1/_{72}\, (t_A - t_R) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17).$$

Der Unterschied zwischen der zur richtigen Berechnung von Q erforderlichen Gastemperatur t_G und der mittleren Querschnittemperatur t_Q steigt also verhältnisgleich mit dem Temperaturunterschied zwischen Rohrachse und Rohrwand $t_A - t_R$. Hieraus folgt die schon ausgesprochene Tatsache, daß bei Rohren mit gleicher Temperatur des Querschnittes durch dasjenige Rohr die größere Wärmemenge fließt, dessen Wandtemperatur niedriger ist als die seiner Achse. Ferner ergibt sich, daß der Unterschied zwischen t_G und t_Q wenig bei tropfbaren Flüssigkeiten und bei solchen Rohren hervortritt, die stark gegen Wärmeverlust geschützt sind. In diesen Fällen ist nämlich der Temperaturunterschied $t_A - t_R$ stets klein. Dagegen ist der Unterschied zwischen t_G und t_Q häufig nicht mehr zu vernachlässigen, wenn es sich um heiße Gasströme in unisolierten oder gar gekühlten Rohren handelt, oder um kühle Gasströme, die durch erhitzte Rohre ziehen. Das Verhältnis zwischen t_G und t_Q ergibt sich aus Gl. (14) und (16) zu

$$\frac{t_G}{t_Q} = {}^8/_9 \cdot \frac{8 + \frac{t_R}{t_A}}{7 + \frac{t_R}{t_A}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18).$$

Das Verhältnis der wahren Gastemperaturen zweier kongruenter Ströme, die gleiche mittlere Querschnittemperatur t_Q, aber die Achsentemperaturen t_{A1} und t_{A2} haben, ist

$$\frac{t_{G1}}{t_{G2}} = \frac{8 + \frac{t_{A1}}{t_Q}}{8 + \frac{t_{A2}}{t_Q}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19).$$

Hiernach kann der Unterschied der durch den Rohrquerschnitt gehenden Wärmemengen in dem äußersten Falle, daß t_{A1} sehr viel größer als t_{A2} wird, beliebig groß werden, obwohl die mittleren Temperaturen des Querschnittes gleich sind.

Der Ort im Rohrquerschnitt, in dem die wahre Gastemperatur t_G herrscht, ist die Schnittlinie der Ebene gleichbleibender Temperatur t_G, die durch Gl. (16) dargestellt ist mit der Fläche des Temperaturfeldes nach Gl. (5). Es ist also

$$^8/_9\, t_A + {}^1/_9\, t_R = (t_A - t_R)\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2}\right)^{1/7} + t_R \quad \ldots \ldots \quad (20).$$

Hieraus ergibt sich

$$r = R\sqrt{1 - (^8/_9)^7} = 0{,}750\, R \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21).$$

Im Abstande $\frac{3\,R}{4}$ von der Rohrachse wird also die wahre Gastemperatur gemessen, gleichgültig, ob das Gas wärmer oder kälter als die Rohrwand ist. Der Ort, an dem die mittlere Querschnittemperatur t_Q gemessen wird, liegt ein wenig weiter nach der Rohrwand zu, und zwar bei

$$r = R\sqrt{1 - (^7/_8)^7} = 0{,}780\, R \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22).$$

Der Unterschied der Entfernungen in Gl. (21) und (22) ist so gering, daß er im allgemeinen nicht genau genug bestimmbar sein wird; man zieht dann am besten Gl. (14) und (16) zu Hilfe und bestimmt außerdem die gesuchte Temperatur aus der Temperatur der Rohrwand und der Rohrachse.

Von Wichtigkeit ist ferner die Kenntnis des Ortes, an dem die mittlere Geschwindigkeit u_Q herrscht, da an dieser Stelle die Gasmengenbestimmung mit dem Staurohr erfolgen muß. Die mittlere Geschwindigkeit u_Q im Rohrquerschnitt ergibt sich aus Gl. (9) zu

$$u_Q = {}^7/_8\, u_{\max} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23),$$

und der Ort, an dem diese gemessen wird, auf dieselbe Weise wie vorhin zu

$$r = R\sqrt{1 - (^7/_8)^7} = 0{,}780\, R \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24).$$

Man hat also, um eine richtige Wärmemengenmessung auszuführen, das zur Volumbestimmung V benutzte Staurohr bis zu einer Entfernung von $0{,}22\, R$ von der Rohrwand in die Strömung zu stecken und die Lötstelle des entsprechend gegen die Strahlung der Wände geschützten Thermoelementes um $0{,}25\, R$ von der Wand entfernt zu halten.

Die experimentelle Prüfung der v. Kármánschen Gleichung des Strömungsfeldes (1) ist durch die daraus folgende Bedingung nach Gl. (23) und (24) möglich; man muß danach in einer Entfernung von $0{,}78\, R$ von der Rohrachse eine Geschwindigkeit finden, die $^7/_8$ so groß ist wie in der Achse. Ist diese Forderung erfüllt, so ist weiter eine experimentelle Prüfung der Prandtlschen Theorie der Aehnlichkeit des Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes durch die Gl. (10) und (21) oder (14) und (22) ermöglicht, da in diesen gefordert ist, daß in einer Entfernung von 0,25 Rohrradien von der Wand eine Temperatur t_G herrscht, die sich aus Wandtemperatur t_R und Achsentemperatur t_A nach der Gleichung

$$t_G = {}^8/_9\, t_A + {}^1/_9\, t_R$$

zusammensetzt.

Bei der experimentellen Bestimmung der mittleren Querschnittstemperatur t_Q mit dem flächenhaften Widerstandsthermometer besteht die Schwierigkeit, daß dieses nur schwer die Gasschichten in unmittelbarere Wandnähe erfassen kann, da es aus Gründen des Schutzes gegen die Wandstrahlung und wegen der elektrischen Isolation im allgemeinen nicht unmittelbar an die Wand herangeführt werden kann. Damit fallen diese Temperaturen bei der Mittelbildung fort. Sie fallen aber auch bei der Bildung der wahren Gastemperatur t_G fort, da sie dabei als Faktor der gegen O strebenden Geschwindigkeit u auftreten. So ergibt sich, daß man bei einer in dieser Art unvollkommenen Messung der Querschnittemperatur eine Temperatur findet, die eher die wahre Gastemperatur als die Querschnittemperatur darstellt. Freilich können die Abweichungen so groß werden, daß der Fehler $t_G - t_{Q\,\text{gemessen}}$ ebenso groß, aber entgegengesetzt wie der Fehler $t_G - t_{Q\,\text{richtig}}$ wird.

Zusammenfassung: Mit Hilfe der v. Kármánschen Gleichung des Geschwindigkeitsfeldes in beruhigten turbulenten Strömen [Gl. (1)] und der Prandtlschen Theorie der Aehnlichkeit des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes ergibt sich der Unterschied zwischen mittlerer Querschnittemperatur und wahrer Gastemperatur zu

$$t_G - t_Q = {}^1/_{72}\,(t_A - t_B).$$

Bei gleichen mittleren Temperaturen des Strömungsquerschnittes und kongruenten Strömungen strömt durch den Querschnitt desjenigen Rohres in der Zeiteinheit die größere Wärmemenge, dessen Wand kühler ist als der strömende Stoff.

Die wahre mittlere Gastemperatur herrscht auf einem zum Rohr konzentrischen Kreise mit dem Radius $0{,}750\,R$. Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit des Querschnittes herrscht auf einem zum Rohr konzentrischen Kreise mit dem Radius $0{,}780\,R$. Der Vergleich der an diesen Stellen herrschenden Temperatur mit den durch Gl. (16) und (23) gegebenen ermöglicht eine experimentelle Prüfung der v. Kármánschen und Prandtlschen Theorien. Die kaum zu vermeidenden Meßfehler bei der Messung der mittleren Querschnittemperatur t_Q beeinflussen das Ergebnis so, daß es sich der wahren Gastemperatur nähert oder bei größeren Abweichungen einen Fehler vom entgegengesetzten Vorzeichen erzeugt, wie es $t_G - t_{Q\,\text{richtig}}$ besitzt. 339

Über die Reziprozität zwischen Geldwert und Warenpreis.

Von **ERICH SCHNEIDER** in Frankfurt a. M.

In seiner »Theorie des Geldverkehrs«[1]) sagt A. Voigt über den Kaufwert des Geldes folgendes:

»Der vierte und wichtigste Wertbegriff des Geldes ist der Kaufwert oder die Kaufkraft, wie er meistens genannt wird. Er stellt das Verhältnis der Menge der Güter, welche für eine Geldsumme gekauft werden kann, zu dem Nennwert dieser dar. Er ist also nichts anderes als das Reziproke des Wertes der Güter in Geld gemessen. Ist W der Wert der Güter in Geld, so ist $1 : W$ der Wert des Geldes in den Gütern gemessen, und das ist der Kaufwert.

Der Kaufwert des Geldes ist, wie schon oben bemerkt wurde, nichts anderes als das Reziproke des Marktwertes der Güter, die für es erworben werden können. Denn die Nachfrage nach Gütern ist das Angebot des entsprechenden Geldes und das Angebot von Gütern die Nachfrage nach dem dafür zu zahlenden Gelde. Wer Waren kaufen will, bietet Geld an, und wer solche verkaufen will, fragt nach Geld. Mit diesen kurzen Bemerkungen ist im Grunde das ganze vielumstrittene Problem des Kaufwertes des Geldes erledigt. Einer besonderen Geldwerttheorie des Geldes bedarf es nicht, sie ist mit der Theorie des Warenwertes zugleich gegeben. Man kann alle Sätze dieser Theorie umkehren. Ist das Güterangebot groß, so ist es auch die Geldnachfrage, und ist die Güternachfrage klein, so ist es auch das Geldangebot. Bedeutet großes Warenangebot und kleine Nachfrage einen niedrigen Warenpreis, so große Geldnachfrage und kleines Geldangebot einen großen Geldwert. So erklärt sich einfach die Reziprozität vom Marktwert der Güter und dem Kaufwert des entsprechenden Geldes. . . .«

Dieser Darlegung des Sachverhaltes soll hier eine exakte, formelmäßige Darstellung an die Seite gestellt werden, wobei sich überdies einige interessante Tatsachen und Gesetze der Theorie des Waren- und Geldwertes ergeben werden.

1. Die Preisbildung.[2]) Denken wir uns einen Markt, auf dem n Güter gegen Geld ausgetauscht werden. Die Preise der Güter $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ seien bezw. $p_1, p_2 \ldots p_n$, d. h. p_1 bezeichnet die Anzahl Geldeinheiten die einer einzigen Wareneinheit des ersten Gutes äquivalent sind usf.

Die Nachfrage eines bestimmten Wirtschaftssubjektes nach dem Gute γ_1 wird nun im allgemeinen nicht allein von dem Preise p_1 dieses Gutes, sondern auch von denjenigen

[1]) A. Voigt: »Theorie des Geldverkehrs«. Zeitschrift f. Sozialwissenschaft, Neue Folge, XI. Jhrg., 1920, S. 341 ff. und 346 ff.

[2]) Die folgenden Untersuchungen beziehen sich ausschließlich auf teilbare Güter, da die Theorie der Preisbildung der unteilbaren Güte trivial ist.

aller übrigen Güter abhängen. Es ist also, wenn wir mit N_1 die Nachfrage nach dem Gute γ_1 bezeichnen:

$$N_1 = f(p_1, p_2 \ldots p_n) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

Betrachten wir aber vorerst als einfacheren Fall den, daß die Preise von $\gamma_2 \ldots \gamma_n$ konstant sind, so ist N_1 eine Funktion von p_1 allein:

$$N_1 = f(p_1) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

Die Erfahrung lehrt nun, daß ein Wirtschaftssubjekt seine Nachfrage nach einem bestimmten Gute so gestaltet, daß sie mit wachsendem Preise abnimmt bis sie schließlich, sobald der Preis eine bestimmte Größe überschreitet, verschwindet; das Gut ist dem Wirtschaftssubjekt einen höheren Preis nicht »wert«. Die Funktion (2) ist also eine monoton fallende Funktion, die den Verlauf besitzt, den Abb. 1 zeigt.

Bis zum Preise π_0 bleibt die Nachfrage konstant, weil, beim Preise π_0 die Nachfrage »gesättigt« ist, d. h. das Wirtschaftssubjekt seinen vollen Bedarf gedeckt hat und deshalb die Nachfrage nicht steigert, wenn der Preis unter π_0 sinkt. Beim Preise π_1 bricht die Kurve ab. Bei jedem π_1 überschreitenden Preise verschwindet die Nachfrage. Wegen der Subjektivität der Nachfrage (die Bedarfsrichtungen, die Einkommensverhältnisse usf. der einzelnen Menschen sind verschieden) ändert sich diese Kurve von Wirtschaftssubjekt zu Wirtschaftssubjekt. Haben wir n Wirtschaftssubjekte, deren Begehrskreis das Gut γ_1 enthält, die also nach ihm eine Nachfrage entfalten, so seien die ihnen entsprechenden Nachfragefunktionen nach dem Gute γ_1:

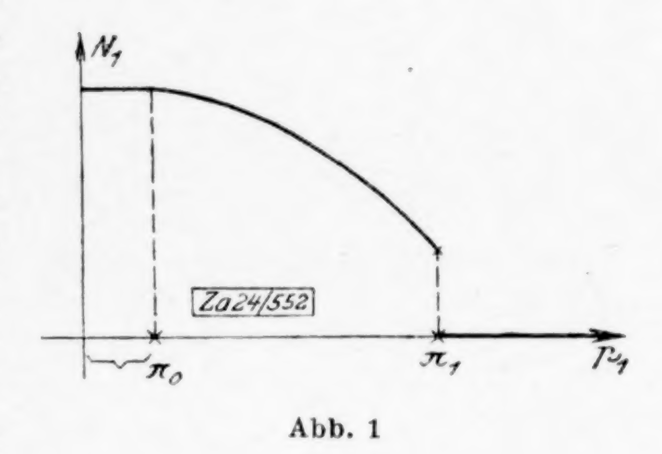


Abb. 1

$$N_1^{(1)} = f_1(p_1), \quad N_1^{(2)} = f_2(p_1), \quad N_1^{(n)} = f_n(p_1) \quad \ldots \ldots (3).$$

Die »Gesamtnachfrage« nach dem Gute γ_1 als Funktion des Preises p_1 desselben erhält man dann durch Superposition dieser Einzelnachfragefunktionen:

$$N_1 = N_1^{(1)} + N_1^{(2)} + \ldots + N_1^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} f_i(p_1) \quad \ldots \ldots (4),$$

wo N_1 die Gesamtnachfrage nach dem Gute γ_1 bezeichnet.

Das ist wieder eine monoton fallende Funktion von demselben allgemeinen Verlauf wie die Einzelnachfragefunktionen.

Der Partei der Nachfragenden nach dem Gute γ_1 stehen nun auf dem Markte die Anbietenden dieses Gutes gegenüber[1]). μ sei die Zahl der Anbietenden des Gutes γ_1; greifen wir wieder aus dieser Zahl erst einen einzigen heraus und betrachten die Menge A_1 dieses Gutes, die er bei einem bestimmten Preise auf den Markt bringt, als Funktion des Preises p_1:

$$A_1 = \varphi(p_1) \quad \ldots \ldots (5).$$

Man nimmt nun gewöhnlich an — ob mit Recht oder Unrecht, wird sich bald zeigen —, daß A_1 eine monoton wachsende Funktion von p_1 sei, und zwar von folgendem Verlauf:

für $o \leq p_1 < \pi_0$ ist $A_1 = o$,
für $\pi_0 \leq p_1 \leq \pi_1$ ist A_1 monoton wachsend,
für $\pi_1 \leq p_1$ ist $A_1 = \varphi(\pi_1)$, d. h. konstant.

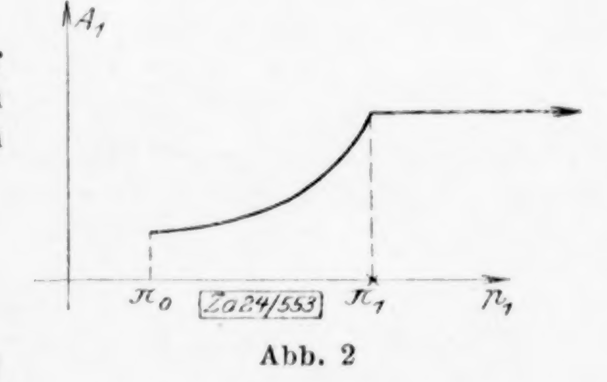


Abb. 2

Das Kurvenbild von (5) sieht also so aus, wie Abb. 2 zeigt. Daß die Kurve von π_1 ab parallel der Preisachse verläuft, folgt daraus, daß beim Preise π_1 das Angebot »erschöpft« ist, d. h. das Wirtschaftssubjekt die ganze ihm zur Verfügung stehende Menge des Gutes γ_1 auf den Markt gebracht hat, es also bei weiter steigendem Preise keine neue Menge mehr anbieten kann.

---

[1]) S. zu dem folgenden Schumpeters Artikel »Angebot« im Handwörterbuch d. Staatswissensch. 4. Aufl., I. Bd., S. 299 ff.

Wie die Gesamtnachfragefunktion, so erhält man natürlich auch hier analog die Gesamtangebotsfunktion durch Superposition der Einzelangebotsfunktionen. Seien diese letzteren:

$$A_1^{(1)} = \varphi_1(p_1), \quad A_1^{(2)} = \varphi_2(p_1), \quad A_1^{(\mu)} = \varphi_\mu(p_1) \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

und bedeutet A_1 das Gesamtangebot der Ware γ_1 beim Preise p_1, so ist:

$$A_1 = A_1^{(1)} + A_1^{(2)} + \ldots + A_1^{(\mu)} = \sum_{i=1}^{\mu} \varphi_i(p_1) \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

Die Funktion (7) ist wieder eine monoton wachsende Funktion von demselben allgemeinen Verlauf, wie ihn Abb. 2 zeigt.

»Angebot und Nachfrage« suchen sich nun auf dem Markte auszugleichen. Es herrscht auf ihm das Bestreben, einen Gleichgewichtszustand herbeizuführen; dieser wird nun nur bei einer ganz bestimmten Preislage, dem Gleichgewichtspreis, erreicht sein. Theoretisch läßt sich dieser Gleichgewichtspreis sehr leicht ermitteln aus

$$A_1 = N_1 \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

oder nach (4) und (7):

$$\sum_{i=1}^{\mu} \varphi_i(p_1) = \sum_{i=1}^{n} f_i(p_1) \quad \ldots \ldots \quad (8a).$$

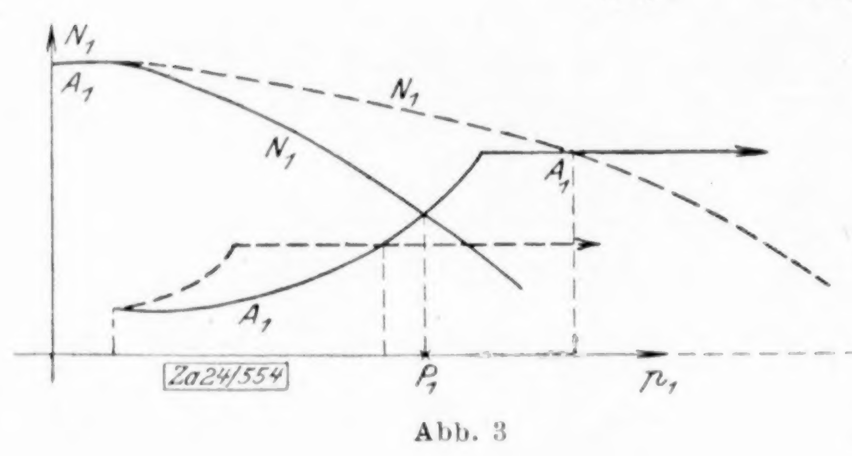


Abb. 3

Aus dieser Gleichung, die nur bekannte Funktionen von p_1 enthält, ist p_1 zu ermitteln. Da die rechte und linke Seite monotone Funktionen (die eine monoton wachsend, die andere monoton fallend) sind, so hat diese Gleichung nur eine einzige Wurzel, die wir mit P_1 bezeichnen wollen. Geometrisch wird diese Wurzel gegeben durch die Abszisse des Schnittpunktes der Gesamtangebotskurve mit der Gesamtnachfragekurve (Abb. 3).

2. Der Geldwert. Betrachten wir der Einfachheit halber wieder erst eine Einzelnachfragekurve der Ware γ_1:

$$N_1^{(1)} = f_1(p_1) \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

Aus dieser Warennachfragekurve läßt sich nun nach dem Satze: »Wer Waren nachfragt, bietet Geld an« leicht die Geldangebotskurve herleiten. Ist beim Preise p die Nachfrage nach der Ware γ_1:

$$N_1^{(1)} = f_1(p) \quad \ldots \ldots \quad (10),$$

so ist das Geldangebot beim Preise p

$$A_g = p \cdot f_1(p) \quad \ldots \ldots \quad (11).$$

Da wir aber A_g nicht als Funktion des Warenpreises p d. h. des Wertes einer Einheit von γ_1 gemessen in Geldeinheiten, sondern als Funktion des Geldwertes, d. h. des Wertes der Geldeinheit gemessen in Einheiten der Ware γ_1 darstellen wollen, so haben wir nur zu beachten, daß der Wert $g^{(1)}$ einer Geldeinheit gemessen in Einheiten γ_1 gleich dem Wert von $\frac{1}{p}$ Einheiten der Ware γ_1 ist; also

$$p \cdot g^{(1)} = 1 \quad \text{oder} \quad p = \frac{1}{g^{(1)}} \quad \ldots \ldots \quad (12).$$

Substituieren wir das in (10), so folgt:

$$A_g = \frac{1}{g^{(1)}} \cdot f_1\left(\frac{1}{g^{(1)}}\right) \quad \ldots \ldots \quad (13).$$

Der Verlauf dieser Kurve ist leicht ersichtlich, wenn man bedenkt, daß nach (11) das Geldangebot beim Preise p dargestellt wird durch das Rechteck $oabp$ (Abb. 4).

Denken wir uns die Nachfragekurve verlängert bis zum Schnittpunkte Q mit der Preisachse (Abb. 5). Auf der Nachfragekurve (9) gibt es dann sicher einen Punkt, seine Abszisse möge π sein, für den das Rechteck $oab\pi$ ein Maximum wird, wenn p alle Werte durchläuft. Unsere Nachfragekurve schneidet aber in Wirklichkeit nicht die Preisachse,

sondern bricht früher ab. Es sind nun drei Fälle möglich: Ist s die Abszisse des Endpunktes der Nachfragekurve, so kann sein:

$$1.\ s < \pi, \quad 2.\ s = \pi, \quad 3.\ s > \pi.$$

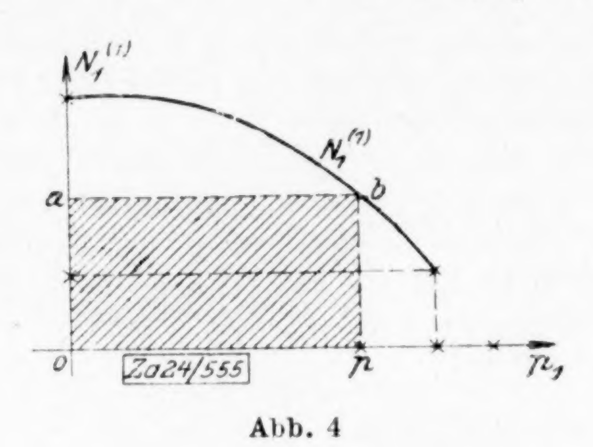


Abb. 4

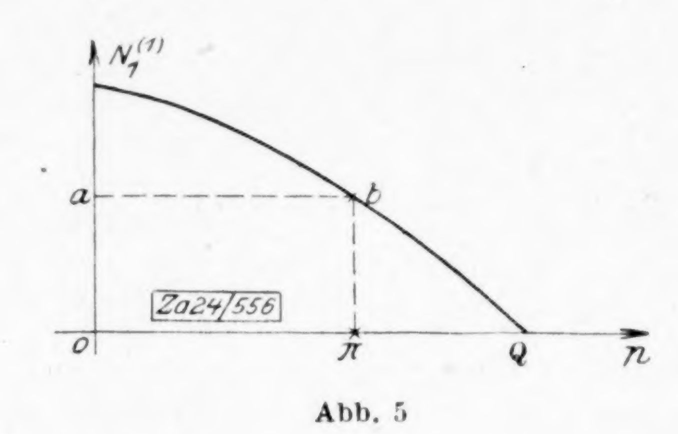


Abb. 5

In den beiden ersten Fällen ist die Geldangebotskurve, als Funktion des Preises p betrachtet, eine im Nullpunkt beginnende monoton wachsende Funktion (s. Abb. 6 I). Im letzten Falle beginnt die Kurve im Nullpunkt, erreicht bei einem gewissen Preise ein Maximum und nimmt von da an ab bis zu einem gewissen Preise, über den hinaus jedes Geldangebot verschwindet (s. Abb. 6 II). Als Funktion von $g^{(1)}$ betrachtet, verlaufen diese Kurven wegen (12) wie folgt:

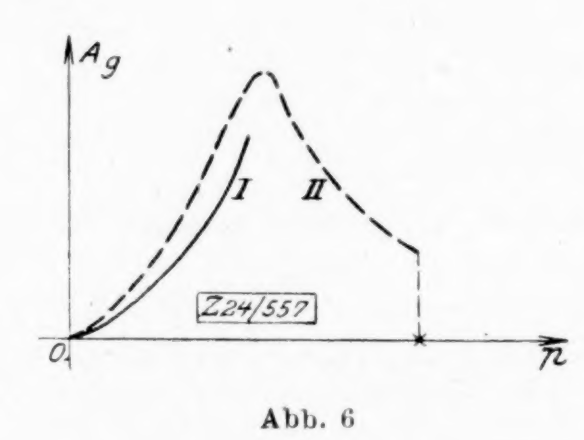


Abb. 6

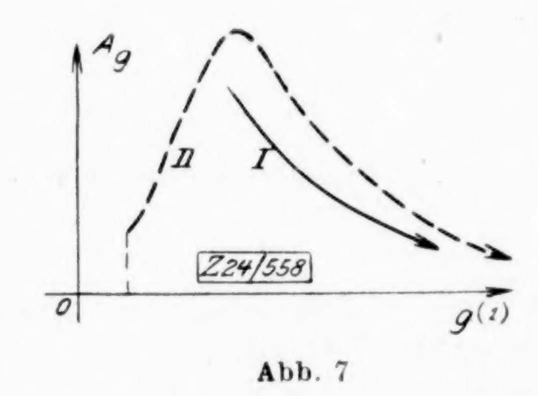


Abb. 7

In den beiden ersten Fällen beginnt die Kurve in einem Punkte mit von Null verschiedenen Koordinaten, nimmt von dort an monoton ab und nähert sich asymptotisch der Geldwertachse (s. Abb. 7 I). Im letzten Falle beginnt die Kurve auch in einem Punkte mit von Null verschiedenen Koordinaten, erreicht bei einem gewissen Geldwert ein Maximum und nähert sich dann ebenfalls asymptotisch der Geldwertachse (s. Abb. 7 II). Der allgemeine Fall ist der dritte und wir wollen aus diesem Grunde weiterhin voraussetzen, daß die Nachfragekurve erst in einem Punkte abbricht, für den $s > \pi$ ist[1]).

Entsprechend leiten wir nun aus der Warenangebotskurve die Geldnachfragekurve ab, nach dem Satze: »Wer Waren anbietet, fragt nach Geld«. Ist beim Preise p das Einzelangebot von γ_1:

$$A_1^{(1)} = \varphi_1(p),$$

so ist die entsprechende Geldnachfrage, die wir mit N_g bezeichnen wollen

$$N_g = p \cdot \varphi_1(p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

oder als Funktion von $g^{(1)}$ betrachtet:

$$N_g = \frac{1}{g^{(1)}} \cdot \varphi_1\left(\frac{1}{g^{(1)}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

N_g ist, da φ eine monoton wachsende Funktion ist, ebenfalls eine solche von p, dagegen wegen (12) eine monoton fallende Funktion von $g^{(1)}$. Das Kurvenbild von (15) hat dann

[1]) Meistens zeichnet man überhaupt die Nachfragekurve als eine stetige monoton fallende Kurve, die im Nullpunkt einen bestimmten endlichen Wert hat, bei einem gewissen Preise verschwindet und alle Zwischenwerte einmal annimmt. Tut man das, so kommt natürlich nur der Fall 3 in Frage. Die Geldangebotskurve beginnt nun jetzt in einem Punkte mit der Ordinate Null. Unsere Darstellung hat den Vorzug, sich den Tatsachen besser anzupassen.

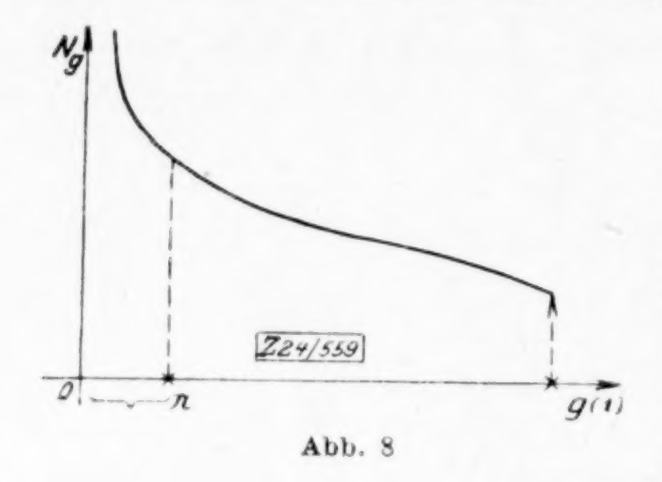


Abb. 8

die Gestalt der Abb. 8. Im Intervall $o \leq g^{(1)} \leq \pi$ ist N_g eine gleichseitige Hyperbel — entsprechend dem der Preisachse parallel laufenden Stück der Warenangebotskurve —; im Intervall $g^{(1)} > \pi$ dagegen ist N_g eine bestimmte andere monoton fallende Funktion, die in einem Punkte mit von Null verschiedenen Koordinaten abbricht.

Die Gesamtnachfragekurve des Geldes, die sich durch Superposition der Einzelnachfragekurven ergibt, hat dieselbe Gestalt wie ihre Komponenten.

Bezeichnen wir das Gesamtangebot des Geldes beim Geldwert $g^{(1)}$ mit A_g, die Gesamtnachfrage mit N_g, so ist also:

$$A_g = \frac{1}{g^{(1)}} \cdot \sum_{i=1}^{n} f_i\left(\frac{1}{g^{(1)}}\right) \quad \text{und} \quad N_g = \frac{1}{g^{(1)}} \cdot \sum_{i=1}^{\mu} \varphi_i\left(\frac{1}{g^{(1)}}\right) \quad \ldots \quad 16).$$

Der »Marktwert«, die Kaufkraft des Geldes gemessen in Einheiten der Ware γ_1, stellt sich nun wieder dar als derjenige Geldwert, bei der die angebotene Geldmenge der nachgefragten gleich ist:

$$A_g = N_g \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

oder nach (16):

$$\frac{1}{g^{(1)}} \cdot \sum_{i=1}^{n} f_i\left(\frac{1}{g^{(1)}}\right) = \frac{1}{g^{(1)}} \cdot \sum_{i=1}^{\mu} \varphi_i\left(\frac{1}{g^{(1)}}\right) \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

oder, da $g^{(1)} \neq o$ ist,

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\left(\frac{1}{g^{(1)}}\right) = \sum_{i=1}^{\mu} \varphi_i\left(\frac{1}{g^{(1)}}\right) \quad \ldots \ldots \quad (18\,a).$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung (8a), so erkennt man als Wurzel dieser Gleichung:

$$g^{(1)} = \frac{1}{p_1} \quad \ldots \ldots \quad (19),$$

d. h. die Kaufkraft des Geldes ist, gemessen in Einheiten einer bestimmten Ware, der reziproke Wert des Marktwertes dieser Ware, d. h. des Marktpreises dieser Ware gemessen in Geld.

3. Bemerkungen über die Angebots- und Nachfragekurve. Die vorstehenden Untersuchungen geben nun Gelegenheit zu einigen allgemeineren Schlüssen über die Gestalt der Angebots- und Nachfragekurve eines Gutes.

Denken wir uns zwei Personen A und B, von denen die eine eine gewisse Menge eines Gutes α, die andere eine gewisse Menge eines Gutes β besitzt. Beide seien zu dem Entschluß gekommen zu tauschen, da A das Gut β, B das Gut α benötigt, und die beiden Personen von jedem in ihrem Besitz befindlichen Gute über eine über ihren eigenen Bedarf hinausgehende Menge verfügen. Die Person A wird nun bei einem bestimmten Preise p des Gutes β in α eine genau angebbare Nachfrage nach dem Gute β, die Person B eine ebensolche nach dem Gute α entfalten [1]). Walras nennt diese Nachfragen »effektive« Nachfragen. Die Aussage »Preis p des Gutes β in α« bedeutet, daß man p-Einheiten von α gegen eine Einheit von β hergeben muß. Der Preis des Gutes α in β ist dann $\frac{1}{p}$, und die Person B wird diesen Preis ihrer effektiven Nachfrage zugrunde legen. Betrachtet man nun die effektiven Nachfragen beider Personen als Funktionen des Preises, so zeigt die Erfahrung, daß beide monoton fallende Funktionen sind, die eine von p, die andere von $\frac{1}{p}$, die beide die Abszissenachse nicht schneiden, sondern vorher abbrechen. Man erhält so zwei Kurven (Abb. 9); hier bedeutet n_α bezw. n_β die Nachfrage nach dem Gute α bezw. β. Aus der Nachfragekurve n_β läßt sich dann

[1]) Diese effektiven Nachfragen lassen sich ermitteln, wenn man eine Annahme über das wirtschaftliche Handeln der beiden Tauschenden macht. Die übliche Annahme ist die, daß beide ein Maximum an Nutzen zu erreichen suchen. In der Tat führt diese Hypothese, wie wir hier nicht weiter ausführen können, zu Ergebnissen, die mit den Erfahrungstatsachen übereinstimmen. Vergl. Walras, Mathemat. Theorie der Preisbestimmung der wirtschaftl. Güter. Stuttgart 1881.

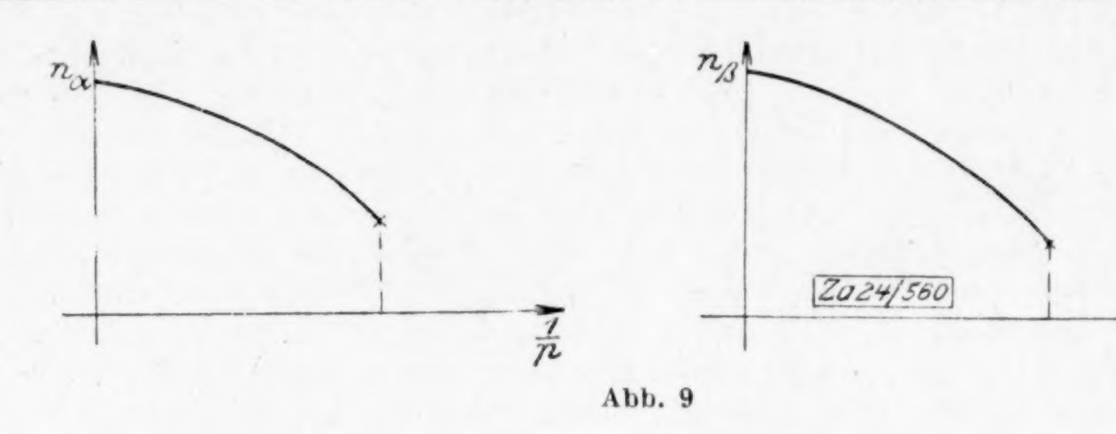


Abb. 9

eicht die Angebotskurve des Gutes α, a_α als Funktion von $\frac{1}{p}$, und aus n_α die des Gutes β, a_β als Funktion von p herleiten. Diese beiden Kurven zeigen (s. Abb. 10) denselben Verlauf wie die früher ermittelte Geldangebotskurve, wie es ja auch sein muß.

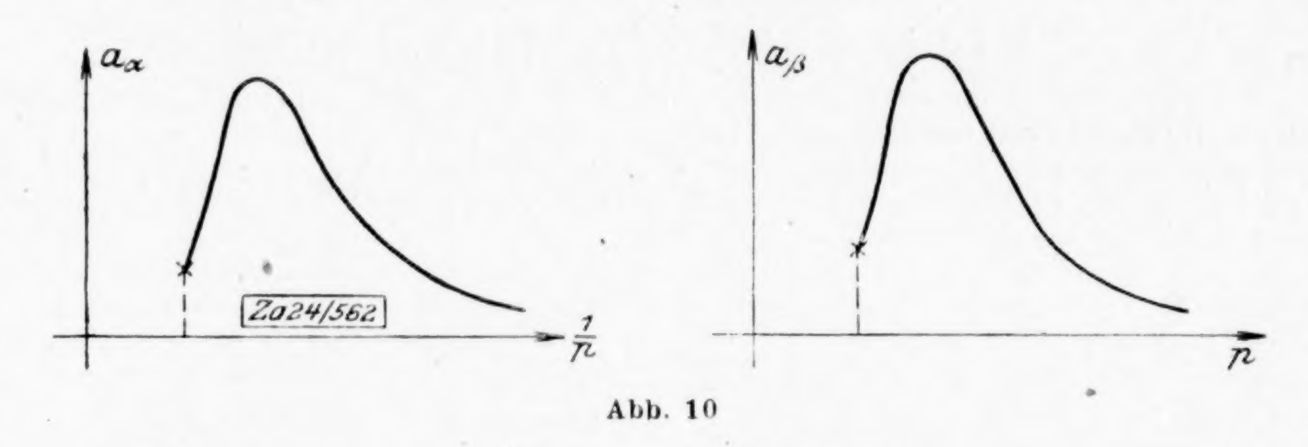


Abb. 10

Die Warenangebotskurve unserer früheren Darlegungen, also die der Geldwirtschaft, wie wir sie der Erfahrung entnehmen, ist nun offenbar nur ein Spezialfall dieser allgemeinen Angebotskurve, der abfallende Ast der letzten wird zu einer Parallelen zur Preisachse (s. Abb. 11). Diese Warenangebotskurve ergab nun eine Geldnachfragekurve, die auch nichts anderes als einen Spezialfall der allgemeinen Nachfragekurve darstellt. Diese letztere hat im Nullpunkt einen endlichen, von Null verschiedenen, positiven Wert; die Geldnachfrage dagegen wächst mit nach Null konvergierendem Geldwerte über alle Grenzen, nähert sich asymptotisch der Ordinatenachse. Diese Gestalt der Geldnachfragekurve läßt sich auch ohne weiteres der Erfahrung entnehmen; es erscheint hiernach überhaupt zweckmäßig der Theorie der Preisbildung die Nachfragekurven der beiden Marktparteien zugrundezulegen, und die Preisbildung zuerst darzulegen für den oben besprochenen Fall des Austausches zweier Güter zwischen zwei Personen. Will man dann die Theorie auf den heute herrschenden Fall des Austausches einer Ware gegen Geld ausdehnen, so hat man nur der einen der beiden Waren Geldcharakter beizulegen, was sich in der oben besprochenen Modifikation der Nachfragekurve äußert. Aus der Waren- bezw. Geldnachfragekurve leitet man dann die Geld- bezw. Warenangebotskurve und dann auf die früher besprochene Weise den Gleichgewichtspreis ab. Diese Darstellung hat den Vorteil, daß sie den Dualismus zwischen Geldwert und Warenpreis bewußt deutlich macht, und damit gleichzeitig mit der Erklärung der Preisbildung, Fragen die mit der Kaufkraft des Geldes zusammenhängen, in ein helleres Licht gerückt werden. Ueberhaupt gewinnt die Theorie der Preisbildung an Allgemeinheit und es tritt vor allem deutlich in Erscheinung, welche Modifikation die Gesetze der Preisbildung beim Uebergang von der reinen Tauschwirtschaft zur Geldwirtschaft erfahren.

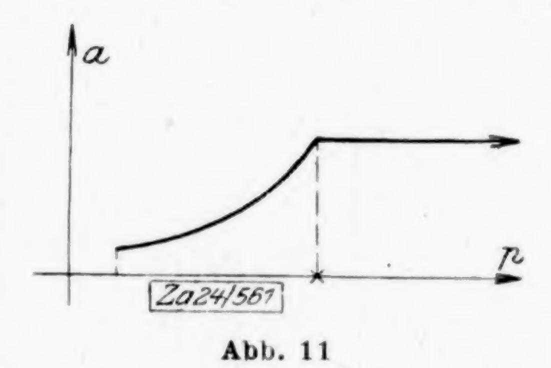


Abb. 11

Ausgehend von ähnlichen Erwägungen[1]) hat Léon Walras 1881 seine mathematische Theorie der Preisbestimmung[2]) entwickelt, von der ein wesentlicher Teil gerade

[1]) Er läßt das Geld ganz außer acht, weil es nach seiner Meinung für die Theorie eine Komplikation bedeutet.

[2]) L. Walras, l. c.

heute wieder im Mittelpunkt der theoretischen Erörterung steht. Die neue Theorie der Preisbildung des Schweden Gustav Cassel[1]) beruht fast ganz auf Ideengängen, die, wenn auch hie und da stark modifiziert, in der Walras'schen Theorie wurzeln.

Wollten wir unsere Betrachtungen weiterführen, so müßten wir die zu Beginn der Arbeit gemachte Voraussetzung fallen lassen, daß die Nachfrage nach einem Gute eine Funktion allein des Preises dieses Gutes sei. Wir müßten die Nachfrage nach einem Gute als eine Funktion des Preises dieses Gutes und der Preise aller anderen in den Begehrskreis des betreffenden Wirtschaftssubjektes fallenden Güter betrachten. Doch können wir uns diese Darlegung hier ersparen, indem wir auf die Arbeit von Walras[2]) hinweisen, der dieses allgemeinere Problem bereits behandelt hat. 293

[1]) G. Cassel, Theoretische Sozialökonomik. 2. Auflage. Leipzig 1921.
[2]) L. Walras, l. c.

KLEINE MITTEILUNGEN

Graphische Rechentafeln für Gleichungen von der Form $xy = u + v$. Im folgenden sind einige Rechentafeln zusammengestellt für Gleichungen mit vier Veränderlichen x, y, u und v von der Form $xy = u + v$; bei der Herstellung dieser Tafeln wurde angenommen, daß sowohl Punktskalen als auch Kurvenskalen zugelassen sind.

1. Führt man eine weitere Veränderliche z ein, indem man setzt

$$xy = z \text{ und } u + v = z,$$

so kann man jede dieser beiden Gleichungen durch eine Tafel mit Kurvenskalen darstellen; die Tafel für die Gleichung $xy = u + v$ besteht dann aus zwei Teilen, die durch eine nach z bezifferte Kurvenskala miteinander verbunden sind.

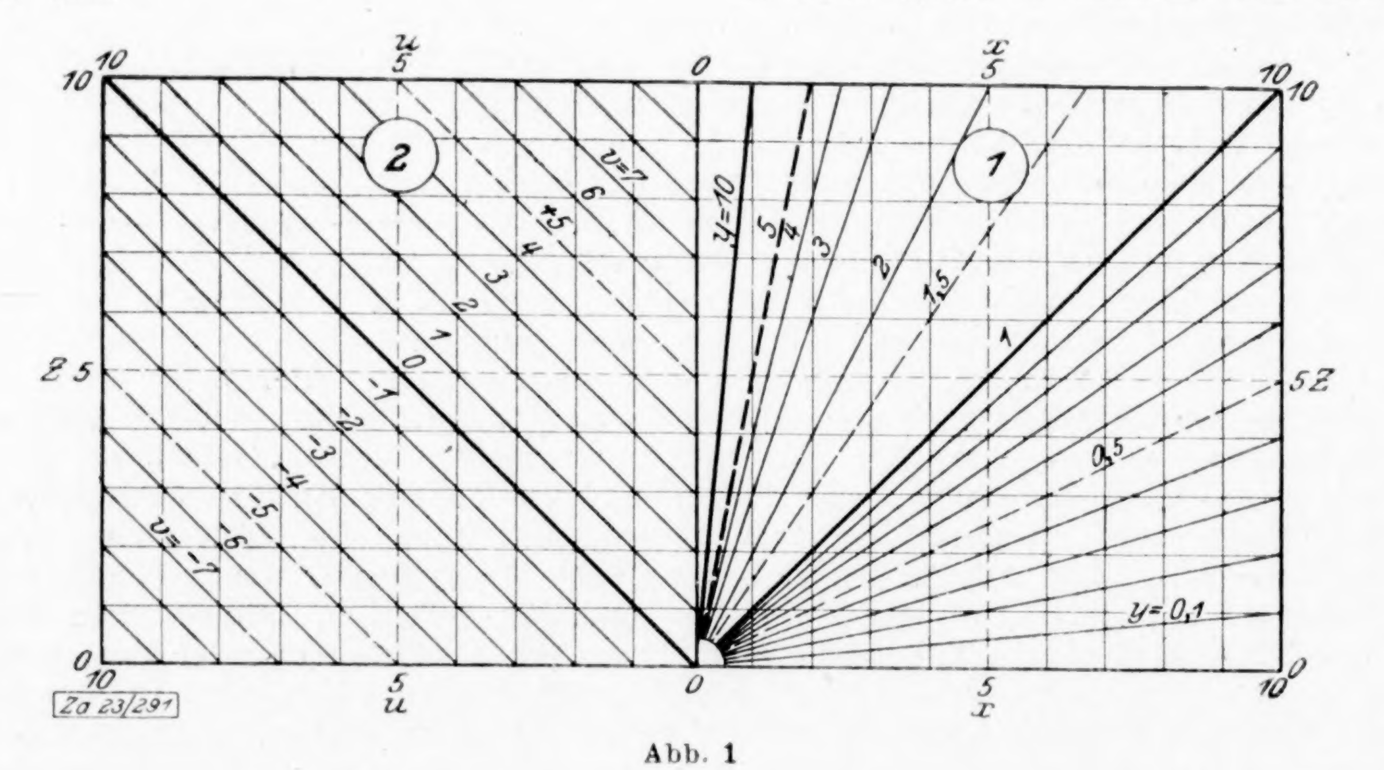


Abb. 1

Der erste Tafelteil (Abb. 1) besteht im einfachsten Fall aus einer nach x bezifferten Schar von Parallelen zur Ordinatenachse, einer nach z bezifferten Schar von Parallelen zur Abszissenachse und einer nach y bezifferten Schar von Geraden durch den Ursprung. Der zweite Tafelteil besteht aus einer nach u bezifferten Schar von Parallelen zur Ordinatenachse, einer nach z bezifferten Schar von Parallelen zur Abszissenachse und einer nach v bezifferten Schar von Parallelen mit dem Richtungswinkel gleich einem halben Rechten[1]).

Da die nach z bezifferte Parallelenschar die beiden Tafelteile verbindet oder auch den Uebergang von dem einen Tafelteil zum andern vermittelt, so kann man sie als Verbindungsskala oder auch Uebergangsskala bezeichnen. Mit Rücksicht auf diesen Zweck der z-Skala ist bei ihr eine Bezifferung nicht erforderlich[2]); die Skala muß nur so gezeichnet sein, daß sie ihren Zweck in einfacher und übersichtlicher Weise erfüllt.

Die in der Abb. 1 angedeutete Tafel ist eine zweiteilige, nur Kurvenskalen enthaltende Tafel mit einer Parallelenschar als Verbindungsskala der beiden Tafelteile. Die Benutzung der Tafel zur Ermittlung einer der vier Veränderlichen auf Grund gegebener Werte der drei anderen

[1]) Unter der Voraussetzung, daß für die Abszissen und die Ordinaten derselbe Maßstab gewählt wird.

Veränderlichen ist bei jeder der Veränderlichen gleich bequem.

2. Schreibt man die vorliegende Gleichung $xy = u + v$ in der Form

$$\log x + \log y = \log (u + v).$$

und setzt man

$\log x + \log y = \log z$ und $\log (u + v) = \log z$,

so ist durch jede dieser beiden Gleichungen eine Tafel mit Kurvenskalen bestimmt; die Tafel für die Gleichung $xy = u + v$ besteht also wieder aus zwei Teilen mit einer nach z bezifferten Verbindungsskala.

Der durch die Gleichung $\log x + \log y = \log z$ bestimmte Tafelteil (Abb. 2) besteht aus zwei zueinander senkrechten, nach x bezw. z bezifferten Parallelenscharen und einer nach y bezifferten Schar von Parallelen mit dem Richtungswinkel gleich einem halben Rechten[1]); dieser erste Tafelteil unterscheidet sich von dem ersten der in der Abb. 1 dargestellten Tafel zunächst darin, daß der Maßstab für x und z bei der Tafel der Abb. 1 ein gewöhnlicher oder gleichmäßiger, bei der Tafel der Abb. 2 dagegen ein logarithmischer ist. Der zweite, durch die Gleichung $\log z = \log (u + v)$

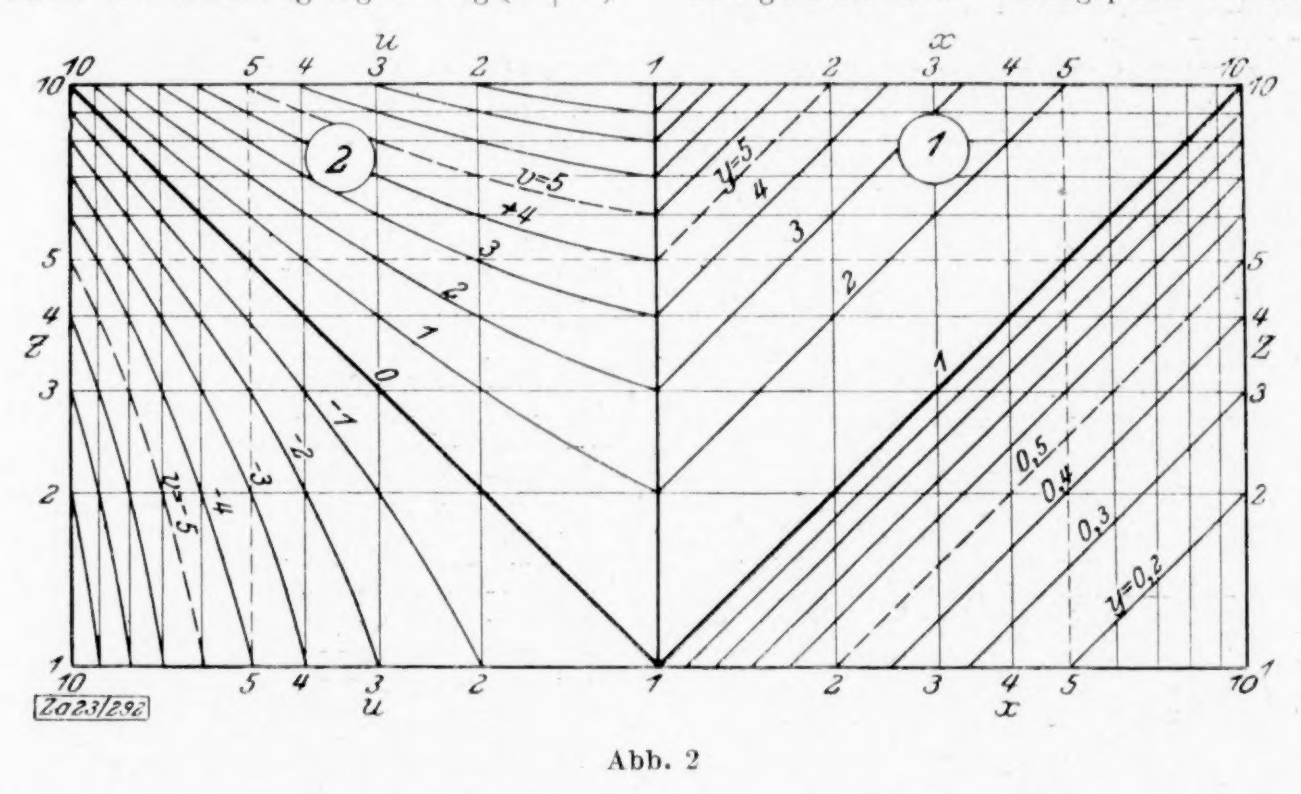


Abb. 2

bestimmte Tafelteil (Abb. 2) enthält eine nach u bezifferte Parallelenschar, eine dazu senkrechte, nach z bezifferte Parallelenschar und eine nach v bezifferte, in einfacher Weise zu bestimmende Kurvenschar; für den die u-Skala festlegenden Maßstab kann ein gleichmäßiger oder ein logarithmischer gewählt werden, bei der Tafel der Abb. 2 wurde ein logarithmischer angenommen.

Die Benutzung eines logarithmischen Maßstabes für die nach z bezifferte Verbindungs- oder Uebergangsskala der beiden Tafelteile ist nur für die Herstellung der Tafel erforderlich; für den praktischen Gebrauch zeichnet man die z-Skala am besten als Parallelenschar mit gleichen Abständen. Eine Bezifferung der Verbindungsskala ist für die Benutzung der Tafel nicht erforderlich[3]).

Auch bei der in der Abb. 2 angedeuteten zweiteiligen Tafel mit Kurvenskalen ist es gleichgültig, welche der vier Veränderlichen zu bestimmen ist; die Tafel kann für jeden der vier möglichen Fälle gleich bequem benutzt werden.

3. Die in der Form $\log x + \log y = \log (u + v)$ geschriebene Gleichung $xy = u + v$ kann man auch in einer nur einteiligen Tafel mit Kurvenskalen darstellen; die Benutzung der Tafel erfordert aber dann eine von R. Mehmke unter dem Namen Additionskurve eingeführte Hilfskurve[4]).

Die Koordinaten AB und BC (Abb. 3) eines Punktes C der Additionskurve sind derart, daß wenn die Abszisse $AB = \log b - \log a$, die Ordinate $BC = \log (a + b) - \log b$ ist. Sind demnach von zwei gegebenen Größen a und b ($b > a$), deren Logarithmen $\log a$ und $\log b$ durch Strecken im Maßstab der Additionskurve dargestellt, und legt man $\log a$ und $\log b$ mit gemeinsamem Anfangspunkt in der in der Abb. 3 angegebenen Weise an die Abszissenachse der Additionskurve, so kann man $\log (a + b)$ in einfacher Weise dadurch bestimmen, daß man $BD = BC$ macht.

Die durch die Gleichung $\log x + \log y = \log (u + v)$ bestimmte Tafel besteht aus einer nach x bezifferten Schar von Parallelen zur Abszissenachse (Abb. 4), einer nach $(u + v)$ bezifferten Schar von Parallelen zur Ordinatenachse und einer nach y bezifferten Schar von Parallelen zur ersten Mediane. Außer diesen drei Kurvenskalen besitzt die Tafel zwei zu beiden Seiten einer Geraden ange-

[2]) In der Abb. 1 ist die Bezifferung der z-Skalen deshalb angegeben, damit der Aufbau der Tafel leichter zu übersehen ist.

[3]) In der Abb. 2 wurde die z-Skala in der Weise gezeichnet und beziffert, wie dies zur Herstellung der Tafel notwendig ist.

[4]) Vergl. R. Mehmke, Leitfaden zum graphischen Rechnen, Leipzig und Berlin 1917, S. 26.

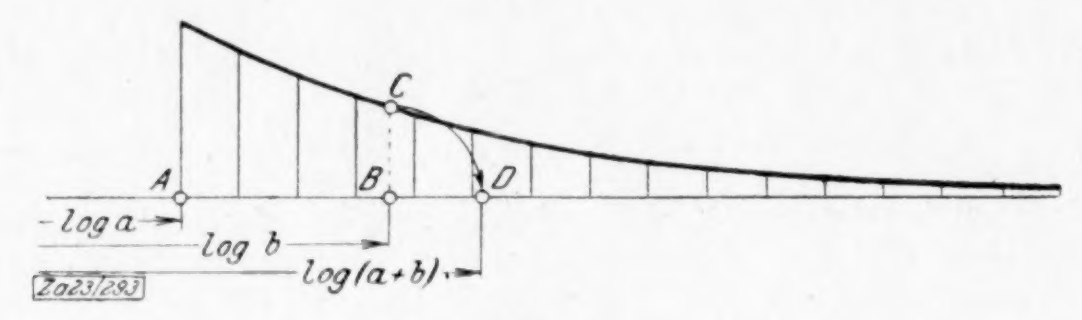


Abb. 3

tragene, nach u und v bezifferte Punktskalen, bei denen im Maßstab der Abszissen die Werte $\log u$ und $\log v$ angetragen sind; die Benutzung der Tafel erfordert dann noch die ebenfalls im Abszissenmaßstabe, am besten auf einem durchsichtigen Stoff (Pauspapier) gezeichnete Additionskurve. Bei gegebenen Werten von u und v legt man die Additionskurve so auf die u- bezw. v-Skala, daß ihre Abszissenachse mit der Trägergeraden der Skalen und ihr Abszissenanfangspunkt A mit

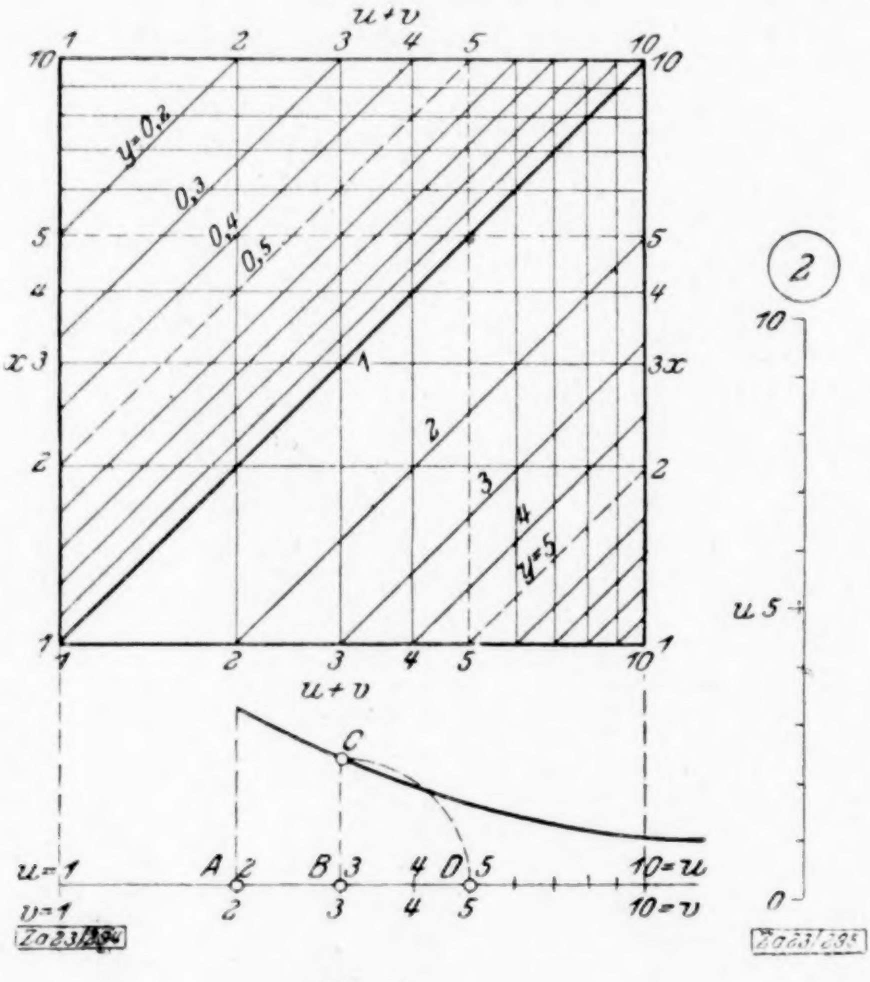


Abb. 4

dem durch den kleineren Wert von u und v bestimmten Skalenpunkt — in der Abb. 4 ist dies der Punkt 2 — zusammenfällt; hält man mit der einen Spitze eines Stechzirkels den Punkt B fest, und dreht man dann die aufgelegte Additionskurve im Uhrzeigersinn um einen Rechten, so kommt der Punkt C nach D und man kann die andere Zirkelspitze in D einsetzen und damit die Strecke $\log (u + v)$ abgreifen. Das Eingehen mit dem so ermittelten Werte für $\log (u + v)$ geschieht entweder mit Benutzung des Zirkels oder auf Grund einer Schar von — in der Abb. 4 mit Rücksicht auf die Uebersichtlichkeit nicht gezeichneten — Parallelen.

Eine solche, im Grundgedanken nur einteilige Tafel mit zwei Hilfsskalen für u und v eignet sich insbesondere für den Fall, daß die Werte von u und v gegeben sind; sie kann aber auch dann benutzt werden, wenn u oder v zu bestimmen ist.

4. Schreibt man die Gleichung $xy = u + v$ in der schon oben benutzten Form $xy = z$ und $u + v = z$, so kann man sie auch in einer zweiteiligen Tafel darstellen, bei der der erste Tafelteil aus drei Kurvenskalen, und der zweite aus drei Punktskalen besteht. Der erste, durch die Gleichung $xy = z$ bestimmte Tafelteil (Abb. 5) stimmt dann mit dem ersten Teil der Tafel der Abb. 1 überein[5]). Der

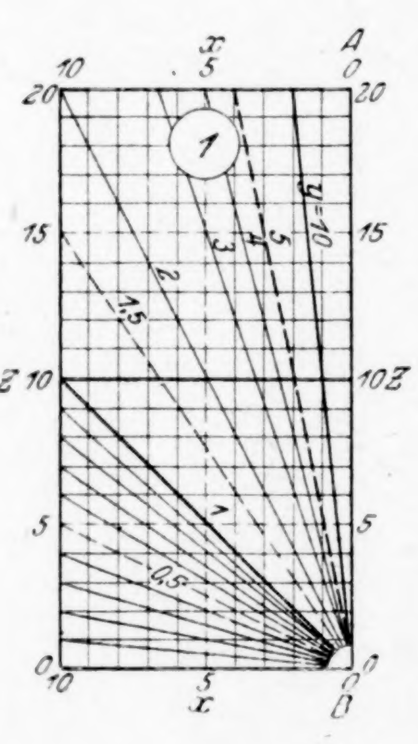


Abb. 5

zweite, durch die Gleichung $u + v = z$ bestimmte Tafelteil ist eine Tafel mit nach u, v und z bezifferten Punktskalen mit parallelen Skalenträgern und einer Geraden als Ablesekurve. Der Uebergang von einem Tafelteil zum andern geschieht mit Hilfe der nach z bezifferten Uebergangsskala, die beim ersten Tafelteil die eine Kurvenskala in Gestalt einer

[5]) **Ein Unterschied zwischen den Tafeln der Abb. 5 und 1 besteht darin, daß bei Abb. 1 für x und z derselbe Maßstab, und bei Abb. 5 verschiedene Maßstäbe gewählt wurden.**

Parallelenschar, und beim zweiten eine Punktskala mit der Trägergeraden AB ist.

Diese Tafel eignet sich für jeden Fall gleich gut, d. h. es ist gleichgültig, welche der vier Veränderlichen zu bestimmen ist. Eine Bezifferung der z-Skalen ist nicht erforderlich.

5. Eine ebenfalls zweiteilige Tafel mit Kurven- und Punktskalen für die Gleichung $xy = u + v$ zeigt die Abb. 6; die Tafel ergibt sich ebenso wie diejenige der Abb. 2 dadurch, daß man die Gleichung in der Form

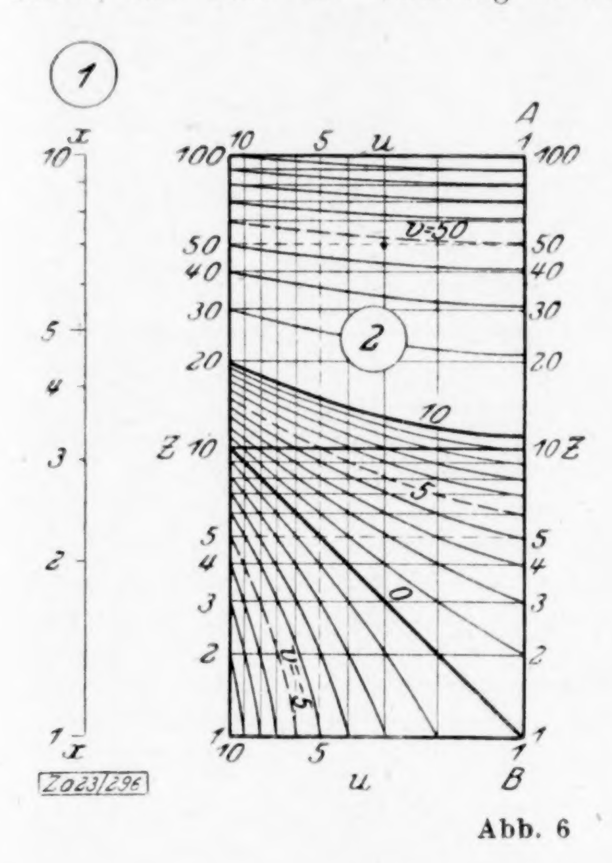


Abb. 6

schreibt $\log x + \log y = \log(u+v)$ und dann setzt

$$\log x + \log y = \log z \quad \text{und} \quad \log(u+v) = \log z.$$

Der erste, durch die Gleichung $\log x + \log y = \log z$ bestimmte Tafelteil enthält drei nach x, y und z bezifferte Punktskalen mit parallelen Skalenträgern und einer Geraden als Ablesekurve. Der zweite, zu der Gleichung $\log(u+v) = \log z$ gehörige Tafelteil stimmt mit dem zweiten der Tafel der Abb. 2 überein[6]). Beide Tafelteile sind durch die z-Skala verbunden, die beim ersten Tafelteil eine Punktskala mit der Geraden AB als Träger, und beim zweiten Tafelteil eine Kurvenskala in Gestalt einer Parallelenschar ist.

Eine Bezifferung der z-Skala ist nicht erforderlich; für den praktischen Gebrauch genügt eine Schar von Parallelen in gleichen Abständen. Die Tafel ist im Gebrauch nicht davon abhängig, daß eine bestimmte der vier Veränderlichen zu ermitteln ist.

6. Die in der Abb. 7 gezeichnete Tafel beruht ebenso wie die Tafel der Abb. 4 auf der Gleichung $\log x + \log y = \log(u+v)$; sie unterscheidet sich von dieser dadurch, daß an die Stelle der Kurvenskalen der Abb. 4 Punktskalen getreten sind.

Die Tafel besteht aus drei nach x, y und $u+v$ bezifferten Punktskalen mit parallelen Skalenträgern; die Ablesekurve ist eine Gerade. Der Träger der $(u+v)$-Skala trägt keine nach $(u+v)$ bezifferte Skala, sondern eine nach u bezifferte und eine nach v bezifferte. Bei der Benutzung der Tafel braucht man eine z. B. auf Pauspapier, im Maßstab der u- bezw. v-Skala gezeichnete Additionskurve, die in der oben angegebenen Weise aufgelegt und gedreht wird. In der Abbildung sind die beiden Lagen der Additionskurve für $u = 4$ und $v = 10$ angegeben; ferner ist die diesen Werten und $x = 7$ und damit $y = 2$ entsprechende Lage der Ablesegeraden eingezeichnet.

Die Tafel der Abb. 7 eignet sich zunächst für den Fall, daß die Werte von u und v gegeben sind; sie kann aber auch zur Bestimmung einer dieser Werte benutzt werden.

7. Die Gleichung $xy = u + v$ kann man auch in einer Tafel mit Punktskalen darstellen mit einem System von Ablesekurven in Gestalt von zwei parallelen Geraden mit veränderlichem Abstand. Den Grundgedanken einer solchen Tafel zeigt die Abb. 8, in der die auf drei Parallelen und einer dazu Senkrechten abgetragenen Strecken $O'B = \varphi_1(x_1)$, $O'A = \varphi_2(x_2)$, $O''C = \varphi_3(x_3)$ und $O'''D = \varphi_4(x_4)$ derart sind, daß AB parallel CD ist; es besteht dann die Gleichung

$$\frac{\varphi_1(x_1)}{\varphi_2(x_2)} = \frac{\varphi_3(x_3) + \varphi_4(x_4)}{O''\,O'''}$$

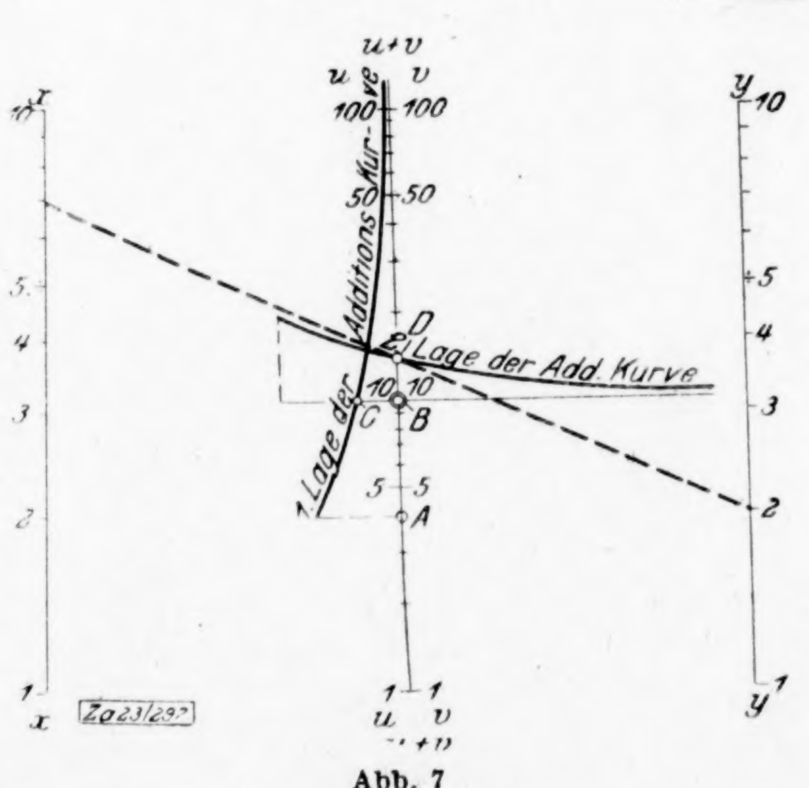


Abb. 7

6) Ein Unterschied zwischen den beiden Tafeln der Abb. 2 und 6 besteht darin, daß bei der ersten für u und z derselbe Maßstab und bei der zweiten verschiedene Maßstäbe benutzt wurden.

oder, wenn $O''O'''$ gleich der Einheit gemacht wird,

$$\frac{\varphi_1(x_1)}{\varphi_2(x_2)} = \varphi_3(x_3) + \varphi_4(x_4).$$

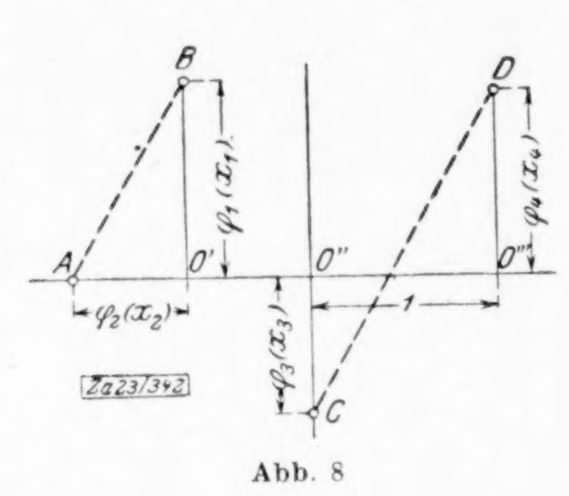


Abb. 8

Vergleicht man mit dieser Gleichung die Gleichung $xy = u + v$, so zeigt sich, daß bei dieser $\varphi_1(x_1) = x$, $\varphi_2(x_2) = \frac{1}{y}$, $\varphi_3(x_3) = u$ und $\varphi_4(x_4) = v$ ist. Hiermit ergibt sich die in der Abb. 9 gezeichnete Tafel für die Gleichung $xy = u + v$, bei der man — wie leicht einzusehen ist — für Abszissen und Ordinaten nach Bedarf verschiedene Maßstäbe wählen kann. Die beiden in der Abbildung angegebenen Ablesegeraden beziehen sich auf die Wertegruppe $x = 4$, $y = 0{,}5$, $u = 5$ und $v = -3$.

Eine solche Tafel kann für jeden Fall verwendet werden, d. h. es ist gleichgültig, welche der vier Veränderlichen bestimmt werden soll.

8. Hat die den vorstehenden Betrachtungen zugrunde gelegte Gleichung die besondere Form $xy = u - v$, so kann man sie auch in einer einteiligen Tafel mit Punkt- und Kurvenskalen und einem Kreis als Ablesekurve darstellen. Eine derartige Tafel für eine Gleichung zwischen den vier Veränderlichen x_1, x_2, x_3 und x_4 besteht im Grundgedanken aus zwei, z. B. nach x_1 und x_2 bezifferten Punktskalen und zwei, dann nach x_3 und x_4 bezifferten Kurvenskalen (Abb. 10); je vier, eine gegebene Gleichung befriedigende Werte der Veränderlichen sind bestimmt durch drei Punkte M, P_1 und P_2, von denen M auf der x_1-Skala der Mittelpunkt eines durch die beiden anderen Punkte gehenden Kreises ist.

Sind bei einer solchen Tafel die Träger der beiden nach x_1 und x_2 bezifferten Punktskalen zwei zueinander senkrechte Gerade, die nach x_3 bezifferte Kurvenskala eine Schar von Parallelen zur x_2-Skala und die nach x_4 bezifferten Kurvenskalen eine Schar von Kreisen um den Schnittpunkt der Träger der beiden Punktskalen, so entspricht sie einer Gleichung zwischen x_1 bis x_4 von der angegebenen Form. Den Aufbau einer Tafel dieser Art zeigt die Abb. 11; aus ihr erhält man mit Hilfe des Dreiecks AMP_2

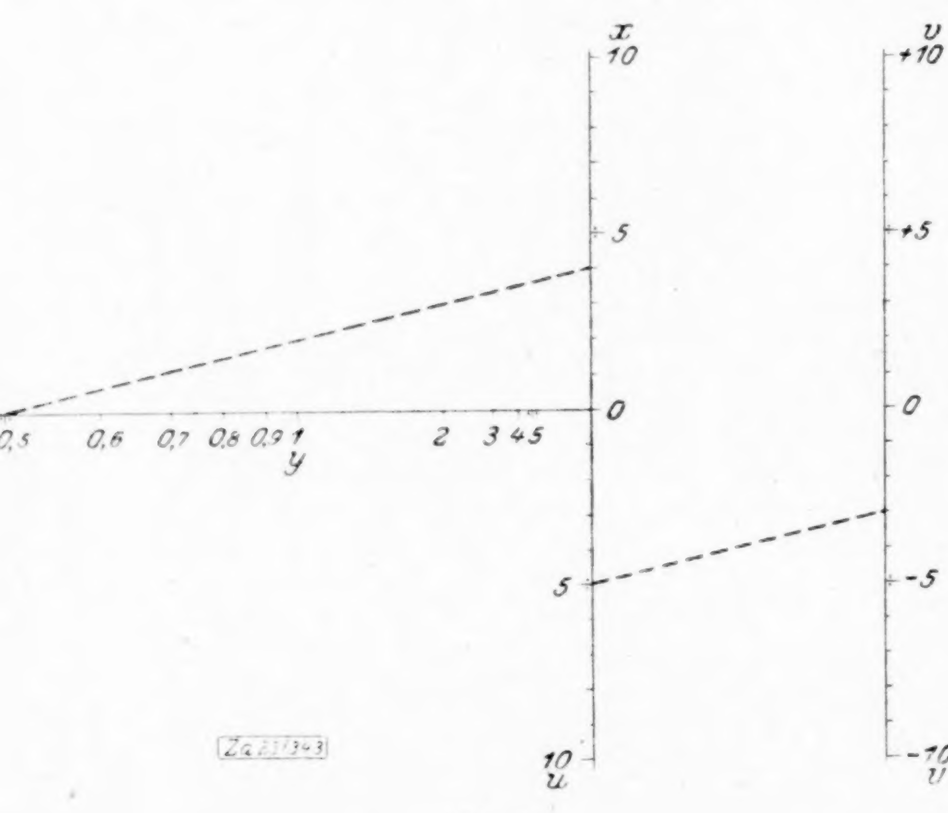


Abb. 9

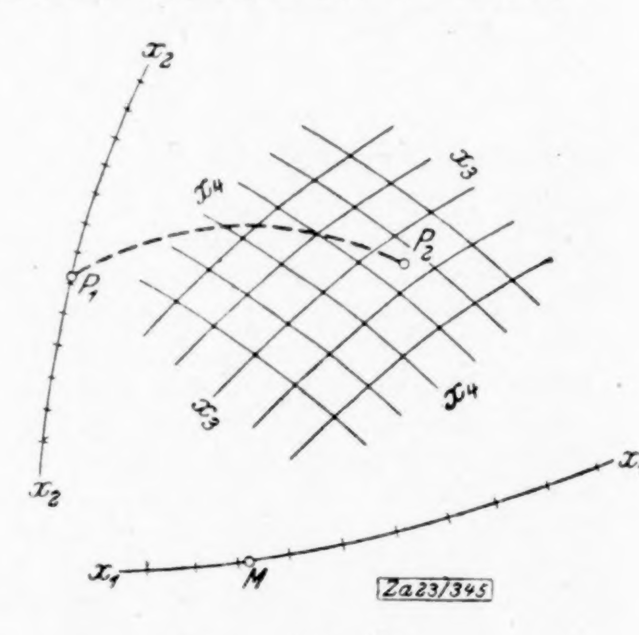


Abb. 10

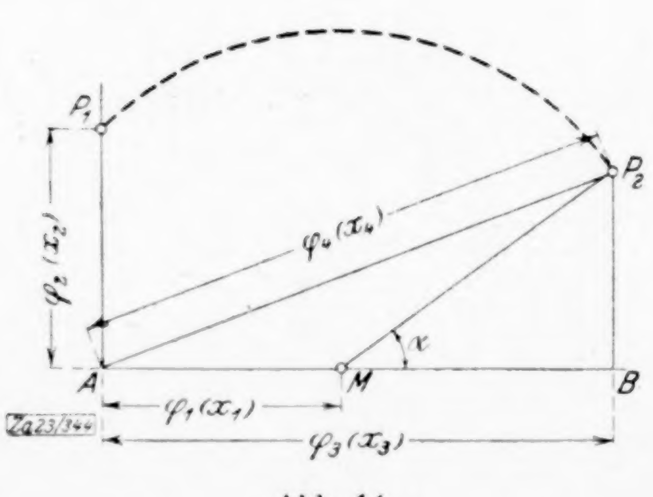


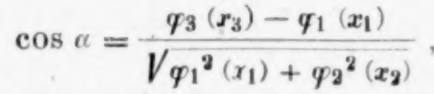
Abb. 11

$$\varphi_4^2(x_4) = \overline{MP_2}^2 + \varphi_1^2(x_1) + 2\,\overline{MP_2}\,\varphi_1(x_1)\cos\alpha;$$

hieraus findet man mit $\overline{MP_2} = \sqrt{\varphi_1^2(x_1) + \varphi_2^2(x_2)}$

$$\cos\alpha = \frac{\varphi_4^2(x_4) - 2\varphi_1^2(x_1) - \varphi_2^2(x_2)}{2\varphi_1(x_1)\sqrt{\varphi_1^2(x_1) + \varphi_2^2(x_2)}}.$$

Beachtet man, daß in dem rechtwinkligen Dreieck MP_2B



$$\cos\alpha = \frac{\varphi_3(x_3) - \varphi_1(x_1)}{\sqrt{\varphi_1^2(x_1) + \varphi_2^2(x_2)}},$$

so erhält man für die zwischen den Strecken $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2)$, $\varphi_3(x_3)$ und $\varphi_4(x_4)$ der Abb. 11 bestehende Gleichung

$$2\,\varphi_1(x_1)\,\varphi_3(x_3) = \varphi_4^2(x_4) - \varphi_2^2(x_2).$$

Vergleicht man mit dieser Gleichung die Gleichung $x\,y = u - v$, so zeigt sich, daß $\varphi_1(x_1) = x$, $\varphi_3(x_3) = y$, $\varphi_4(x_4) = \sqrt{2\,u}$ und $\varphi_2(x_2) = \sqrt{2\,v}$. Damit ergibt sich die in der Abb. 12 gezeichnete einteilige Tafel für die Gleichung $x\,y = u - v$. Nimmt man bei dieser Tafel die Träger der x- und der v-Skala

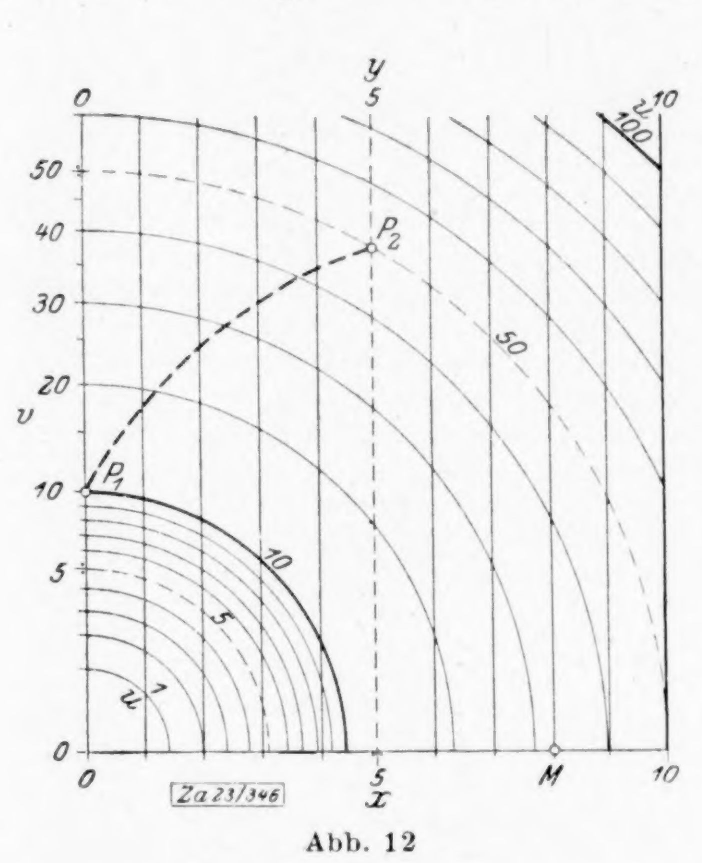


Abb. 12

als Koordinatenachsen an, so sind — wenn die laufenden Koordinaten mit ξ und η bezeichnet werden — die vier Skalen bestimmt durch die Gleichungen

$$\begin{Bmatrix}\eta = 0\\ \xi = x\end{Bmatrix},\quad \xi = y,\quad \xi^2 + \eta^2 - 2\,u = 0 \text{ und } \begin{Bmatrix}\xi = 0\\ \eta = \sqrt{2\,v}\end{Bmatrix}$$

Bei dieser Tafel muß die Maßeinheit der Abszissen dieselbe sein wie die der Ordinaten. Das in Abb. 12 durch die Punkte M, P_1 und P_2 angedeutete Zahlenbeispiel bezieht sich auf die Wertegruppe $x = 8$, $y = 5$, $v = 10$ und $u = 50$. Der Ablesekreis wird bei Benutzung der Tafel natürlich nicht gezeichnet; am besten »rechnet« man mit dem Stechzirkel.

Eßlingen a. N. P. Werkmeister. 311

Ellipsenersatz durch Kreisbögen. Die Krümmungsmittelpunkte D und E für die Achspunkte A und B (Bild 1) erhält man bekanntlich, indem man von der Ecke C des aus den Halbachsen gebildeten Rechtecks die Normale zu der Diagonale AB zieht und bis zum Schnitt mit den Achsen verlängert. Nachdem D und E gefunden und die Kreisbögen AJ und BK mit noch unbestimmter Länge beschrieben sind, soll ein dritter Punkt H so bestimmt werden, daß der um H beschriebene Kreisbogen JK die Kreisbögen AJ und BK berührt.

Denkt man sich die Punkte $ADHE$ durch eine Stabgelenkkette verbunden und zunächst den Stab AD um D gedreht, bis er mit HD in gleicher Linie liegt, hierauf die Stäbe AD und DH mit festem Gelenke D um H gedreht, bis alle drei Stäbe in gleicher Linie liegen, endlich die gestreckte Kette um E gedreht, bis

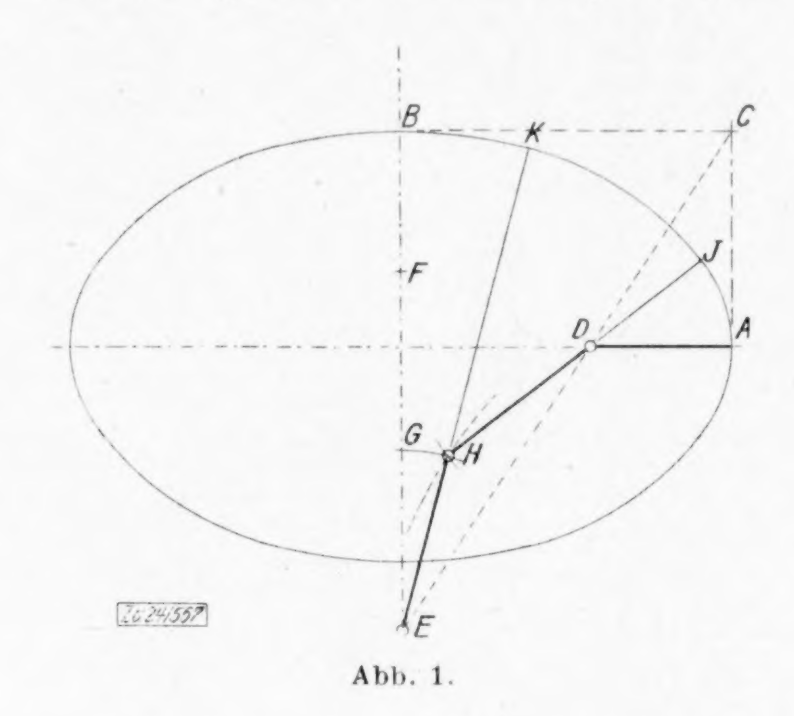


Abb. 1.

sie in die kleine Achse fällt, so beschreibt der Endpunkt eine aus drei Kreisbögen zusammengesetzte Linie, welche durch den Punkt B gehen wird, wenn $AD + DH + HE = EB$, also

$$DH + HE = EB - AD \;.\;.\;.\;.\; (1)$$

ist. Diese Bedingung kann leicht erfüllt werden, indem man die Strecke AD von B nach F aufträgt, so daß

$$DH + HE = EF \;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

wird, sodann EF durch einen Zwischenpunkt G in zwei gleiche oder ungleiche Teile EG und GF zerlegt. Macht man dann $EH = EG$ und $HD = GF$, indem man mit EG einen Kreisbogen um E und mit GF einen Kreisbogen um D beschreibt, so genügt der Schnittpunkt H der in Gl. (1) ausgedrückten Bedingung. Wiederholt man die Konstruktion für verschiedene Lagen von G, so erhält man offenbar verschiedene H, deren geometrischer Ort eine Ellipse mit den Brennpunkten D und E ist. In der Zeichnung ist ein Stück dieser Ellipse angedeutet. Zur Ausführung der Kreisbogenzeichnung ist dieselbe nicht erforderlich. Sie läßt aber den Einfluß der Lage des Punktes G auf die Lage von H und auf die Anschlußpunkte J und K der Ersatzbögen leicht erkennen. Wäre sie gezeichnet, so könnte einer der Punkte J und K auf den Bögen AJ und BK angenommen und H als Schnitt der Strahlen JD oder EK mit der Ellipse gefunden werden. In der Regel wird man G nach Augenmaß etwa in der Mitte von EF oder etwas darüber annehmen dürfen.

Da der Punkt J innerhalb, der Punkt K außerhalb der Ellipse liegt, so muß auf dem

Kreisbogen JK ein genauer Ellipsenpunkt liegen, was zu beachten ist, wenn man vorziehen sollte, die Linie nach einem guten Kurvenholz auszuziehen, um den plötzlichen Krümmungswechsel in J und K zu vermeiden.

Auch die Kreisbogenlinie läßt sich noch etwas verbessern, wenn man nach Schätzung den Radius AD etwas größer, den Radius BE etwas kleiner macht als die Hauptkrümmungsradien.

Für ein größeres Genauigkeitsbedürfnis kann das in Bild 2 dargestellte Verfahren empfohlen werden, bei welchem der Ellipsenquadrant

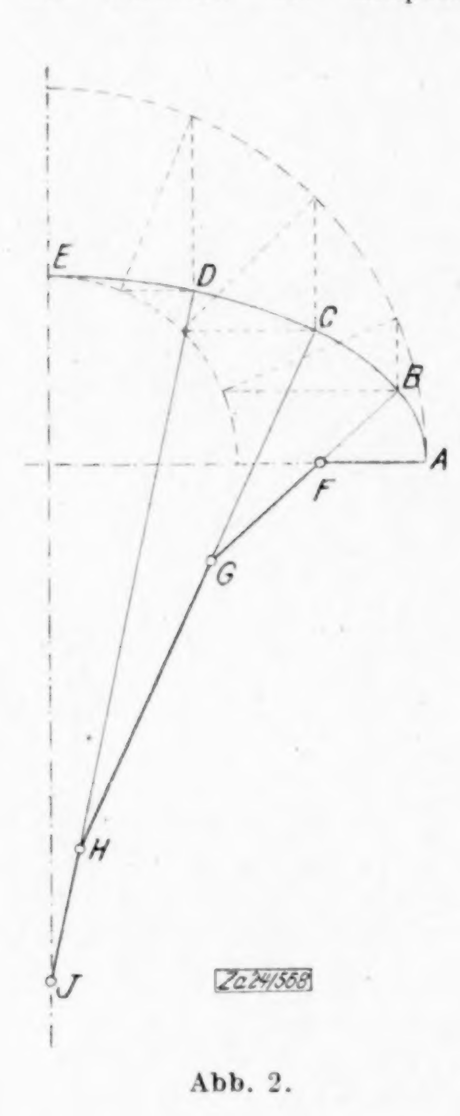


Abb. 2.

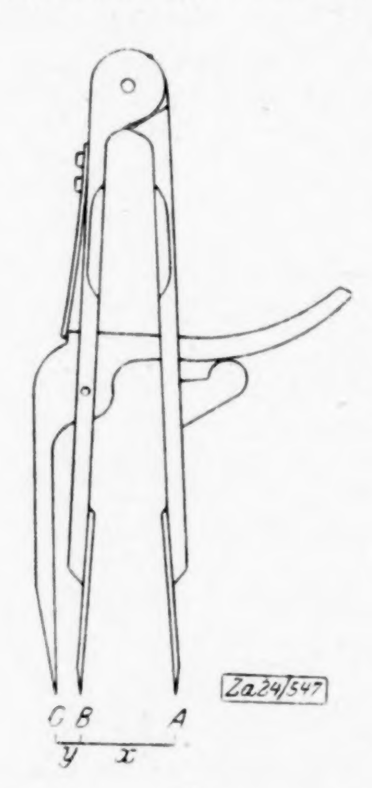
aus 4 Kreisbögen zusammengesetzt wird. Zunächst wurden die Viertelkreise mit den Halbachsen in vier gleiche Teile geteilt und die den Teilpunkten entsprechenden genauen Ellipsenpunkte B, C, D nach bekanntem Verfahren bestimmt. Die Spiegellinie zu A und B ergab sodann den Schnittpunkt F als Mittelpunkt für den Bogen AB. Als Schnitt der Geraden FB und der Spiegellinie zu B und C ergab sich der Mittelpunkt G für den Bogen BC, als Schnitt der Spiegellinie zu C und D mit CG der Mittelpunkt H für den Bogen CD. Man hätte auch für DE den Kreismittelpunkt nach diesem Verfahren finden können. Der Schnittpunkt von DH und der Spiegellinie zu ED liegt aber nicht genau in der kleinen Achse, so daß der Bogen in E nicht mit horizontaler Tangente in den linken Quadranten übergehen, also in E eine Ecke entstehen würde. Um diesen Fehler zu vermeiden wurde als Mittelpunkt für den Bogen DE der Schnitt J der Geraden DH und der kleinen Achse gefunden. Das hat zwar zur Folge, daß der Kreisbogen nicht genau durch den Endpunkt der kleinen Achse geht. Der Fehler ist aber so klein, daß er meist in der Strichstärke verschwindet.

Karlsruhe i. B. Ernst A. Brauer. 385

Der logarithmische Zirkel. Unter diesem Namen wurde gelegentlich der Ausstellung mathematischer und physikalischer Apparate in München 1893 ein auf Anregung von Professor R. Mehmke von mir konstruierter Zirkel mit drei Spitzen A, B, C vorgeführt, welche durch ein Kurvengetriebe so mit einander verbunden sind, daß bei Einstellung der Spitzen A und B auf zwei mit a und b bezifferte Punkte einer logarithmischen Skala sich die dritte Spitze C zwangläufig auf einen Punkt c derselben Skala einstellt, welcher der Gleichung

$$c = a + b \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

genügt. Nachdem der Apparat durch Beschreibung und Abbildung in Mehmkes Leitfaden zum graphischen Rechnen bekannter geworden ist, hat sich die Reißzeugfabrik von E. O. Richter u. Co. in Chemnitz entschlossen, den logarithmischen Zirkel in einer durch unser Bild dargestellten Form zu liefern. Seine Anwendung erstreckt sich vornehmlich auf die



graphische Lösung höherer Gleichungen. Lautet etwa eine solche

$$A x^2 + B x^3 = C,$$

so ist

$$\log (A x^2 + B x^3) = \log C.$$

Nun kann man, indem man setzt

$$\log A x^2 = \log A + 2 \log x = a,$$

$$\log B x^3 = \log B + 3 \log x = b,$$

a und b für veränderliche Werte von $\log x$ durch gerade Linien darstellen und zu jedem x mit dem Zirkel den Wert $\log (A x^2 + B x^3)$ konstruieren. Wo die Kurve, die sich aus dieser Punktreihe ergibt, die in der Höhe $\log C$ gezogene Horizontale schneidet, findet sich ein der Gleichung genügendes x.

Bezeichnet man mit Eu die Entfernung x der Spitzen A und B, mit Ev die Entfernung y der Spitzen B und C für eine gewisse Stellung des Zirkels, unter E die Länge zwischen den Skalenpunkten 1 und 10, die logarithmische Einheit, verstanden, so ist offenbar

$$u = \log b - \log a \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$v = \log c - \log b \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Durch Leonelli ist seit 1806 bekannt, daß v eine eindeutige Funktion von u ist, wie folgende Ueberlegung zeigt. Nach Gleichung (1) ist

$$\log c = \log (a + b) = \log b\,(a/b + 1)$$
$$= \log b + \log (a/b + 1) \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Da aber $a/b = 10^{\log a/b} = 10^{\log a - \log b}$ ist, so folgt aus Gl. (4)

$$\log c - \log b = \log (10^{\log a - \log b} + 1),$$

also nach (2) und (3)

$$v = \log (10^{-u} + 1) \quad . \quad . \quad (5).$$

Der Verlauf dieser Funktion ist aus folgenden Zahlen ersichtlich:

$u =$ 0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,5	2
$v =$ 0,301	0,212	0,146	0,097	0,064	0,041	0,014	0,004.

Eine ausführliche Tabelle hat Leonelli, später C. F. Gauß unter dem Namen Additionslogarithmen herausgegeben. Mehmke hat in seinem Leitfaden die Funktion als Kurve mit rechtwinkligen Koordinaten dargestellt, die er Additionskurve nennt.

Der Zirkel wird für $E = 50$ mm ausgeführt. Er umfaßt das Zahlengebiet $u = 0$ bis $u = 2$. Die größte Entfernung der Spitzen A und B beträgt daher $2 \cdot 50 = 100$ mm, die größte Entfernung von B und C $0{,}301 \cdot 50 = 15{,}05$ mm. Die Einheit $E = 50$ mm muß natürlich auch für die graphischen Darstellungen verwendet werden.

Karlsruhe i. B. Ernst A. Brauer. 355

Günstigste Querschnittsverteilung bei Tiefbohrgestängen. Um das Eigengewicht der Material- und Arbeitsersparnis wegen zu verringern und große Tiefen überhaupt erreichen zu können, wird das Gestänge bei Tiefbohrungen aus einzelnen Teilen zusammengesetzt, deren Querschnitte nach unten zu abnehmen. Im folgenden wird gezeigt, daß diese Teile zweckmäßig gleich lang gemacht werden, und ferner eine Uebersicht gegeben, wie Eigengewicht und Nutzlast bei verschiedenen Teilungen zusammenhängen.

Es seien q_i die Querschnitte und h_i die Längen der n Teilstangen. Sie sollen von unten an gezählt werden. ($i = 1;\ 2 \ldots . n$). Ist P die unten am Gestänge hängende Last, σ in kg/cm² die zulässige Beanspruchung und s in kg/cm³ das spez. Gewicht des Stangenmaterials, so erhält man für den untersten Querschnitt q_1 die Gleichung

$$\sigma\, q_1 = P + q_1 h_1 s \quad \text{oder} \quad q_1 = \frac{P}{\sigma - s h_1},$$

für den zweiten Querschnitt q_2:

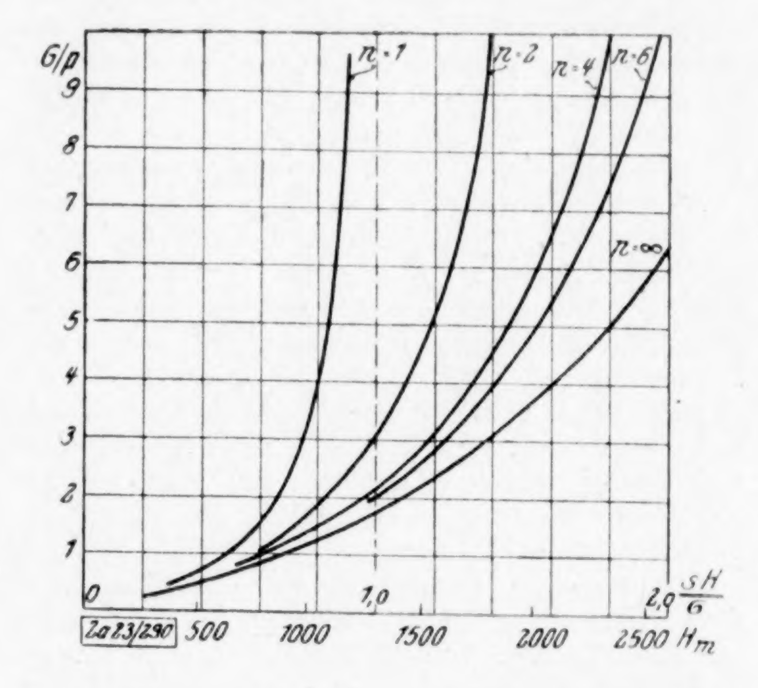
$$\sigma\, q_2 = \sigma\, q_1 + q_2 h_2 s \quad \text{und} \quad q_2 = \frac{\sigma P}{(\sigma - s h_1)(\sigma - s h_2)},$$

und allgemein für den $r$ten Querschnitt

$$q_r = \frac{\sigma^{r-1} P}{(\sigma - s h_1)(\sigma - s h_2) \ldots (\sigma - s h_r)}.$$

Da der oberste Querschnitt q_i die Gesamtlast bestehend aus dem Eigengewicht G des Gestänges und der Last P zu tragen hat, gelten die Gleichungen

$$\sigma\, q_n = \frac{\sigma^n P}{(\sigma - s h_1) \ldots . (\sigma - s h_n)} = P + G.$$



Es gilt nun die einzelnen Stangenlängen h_i so zu bemessen, daß G/P ein Minimum wird. Gleichbedeutend damit ist die Forderung

$$\ln (1 + G/P)$$

zum Minimum zu machen, mit der Nebenbedingung $\Sigma\, h_i = H$, worin H die gegebene Länge des ganzen Gestänges bedeutet. Nach Lagrange hat man dazu die partiellen Differentialquotienten der Funktion

$$n \ln \sigma - \Sigma \ln (\sigma - s h_i) - \lambda\,(\Sigma\, h_i - H)$$

nach den h_i gleich Null zu setzen. Das gibt n gleichlautende Gleichungen

$$\frac{s}{\sigma - s h_i} - \lambda = 0,$$

woraus folgt, daß alle $h_i = H/n$ sein müssen.

Damit erhält man

$$q_n = \frac{P}{\sigma} \, \frac{1}{\left(1 - \dfrac{s H}{\sigma n}\right)^n}$$

und für $n \to \infty$ die denkbar günstigste, stetige Querschnittsverteilung nach dem bekannten Exponentialgesetz

$$q = \frac{P}{\sigma}\, e^{\frac{s h}{\sigma}}.$$

Trägt man G/P als Funktion der dimensionslosen Größe $\frac{sH}{\sigma}$ für verschiedene n auf, so erhält man das nebenstehende Kurvenblatt.

Die einzelnen Kurven haben vertikale Asymptoten bei $\frac{sH}{\sigma} = n$. Es sind dies die Grenzen von $\frac{sH}{\sigma}$, die mit der betreffenden

Stangenteilung n nicht überschritten werden können. Die mit $n = \infty$ bezeichnete Kurve bezieht sich auf das Exponentialgesetz.

Auf der Abszissenachse ist noch eine zweite Teilung angebracht, die die Längen H in Metern angibt, wenn $s = 7{,}7 \cdot 10^{-3}$ und $\sigma = 10^3$, den Werten von Flußeisen entsprechend, gesetzt wird.

Hannover, Mai 1923. v. Sanden. 298

Spannungen in einem Fachwerk, das senkrecht zu seiner Ebene belastet ist.

Das in nachstehender Abbildung gezeichnete regelmäßige Polygon stellt ein Fachwerk dar. Die Polygonstäbe sind knickfeste Stäbe, während die Radialstäbe aus Draht hergestellt sind und nur Zugspannungen aufnehmen können. Der Mittelpunkt M des Polygons ist in Richtung senkrecht zur Fachwerksebene unverschieblich gelagert. Senkrecht zur Fachwerkebene wirke ein überall gleichbleibender Druck von p kg/qcm. Dieser Belastungsfall tritt bei den Hauptringen eines Luftschiffes auf, wenn eine Gaszellle ausläuft, so daß die benachbarte Gaszelle einen einseitigen Druck auf die Radialdrähte ausübt. Infolge dieses Druckes treten in den Radialdrähten Zugspannungen auf, die wieder in den Umfangstäben Druckspannungen hervorrufen. Größen der Druck- und Zugspannungen sind zu bestimmen.

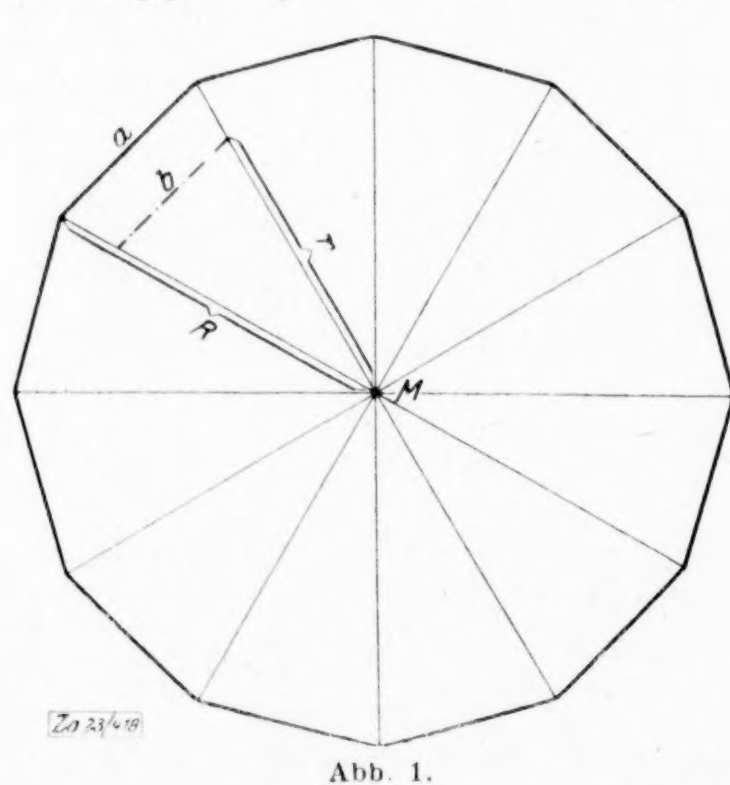


Abb. 1.

Im Verlaufe der folgenden Untersuchung bedeuten E, F, E_1 und F_1 Elastizitätsmodul und Querschnittsfläche eines Radialdrahtes bezw. eines Umfangstabes und R die Länge eines Radialdrahtes.

Die auf einen Radialdraht entfallende Last ergibt sich aus der Formel

$$P = {}^1/_2\, p\, R^2 \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Diese Last P wirkt als Dreiecksbelastung, über die Länge des Drahtes und nimmt proportional mit der Entfernung vom Mittelpunkt M zu. Da Regelmäßigkeit des Polygons vorausgesetzt wird, erhalten alle Radialdrähte die gleiche Belastung und auch die gleiche Spannung. Aus diesem Grunde sind auch die Spannungen in den Polygonstäben einander gleich.

Zur Ermittlung der Spannungen wird nun folgender Weg eingeschlagen: Infolge der Belastung werden die einzelnen Teile des Fachwerks Deformationen erleiden, die Radialdrähte werden sich verlängern, während sich die Umfangstäbe verkürzen. Da die Deformationen der Umfangstäbe einander gleich sein müssen und ebenso diejenigen der Radialdrähte, so ist leicht zu erkennen, daß die Polygonpunkte nach erfolgter Deformation wieder auf einem Kreise liegen. Der Radius dieses Kreises sei r. Infolge dieser Deformation werden die Radialdrähte durchhängen. Entwickelt man nun die Gleichung der Seilkurve, so stellt sich der in den Radialdrähten auftretende Horizontalzug H als Funktion der Durchhängung und damit der gesamten Deformation dar. Auf Grund dieser Betrachtung läßt sich nun eine Beziehung ableiten, aus welcher man auf einfachem Wege den Horizontalzug H in den Radialdrähten ermitteln kann. Mit der Kraft H ist dann auch die Druckkraft in den Umfangstäben gegeben.

Wie schon erwähnt, erhält jeder Draht Dreiecksbelastung, deren Größe nach Gleichung (1) ermittelt werden kann. Da die Durchhängung eines Drahtes stets sehr gering ist, ist es zulässig, die Differentialgleichung der Seilkurve in der Form anzuschreiben:

$$H \frac{d^2 y}{d x^2} = q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Nun ist $q = k x$ und weiters $P = \frac{k r^2}{2}$ (vgl. Abb. 2). Daher geht die Gleichung (2) über in:

$$H \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{2 P}{r^2} x .$$

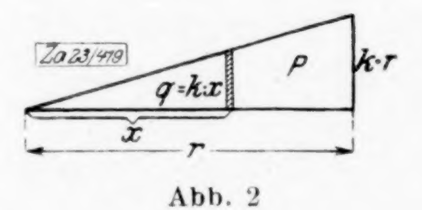


Abb. 2

Integriert erhält man mit den Grenz-Bedingungen:

$$x = 0, \qquad y = 0,$$
$$x = r, \qquad y = 0,$$

als Gleichung der Seilkurve

$$y = \frac{P}{3 H r^2} (x^2 - r^2)\, x \quad . \quad . \quad (3).$$

In dieser Gleichung treten noch die Unbekannte H und r auf. Zur Ermittlung dieser Unbekannten bestimmt man zunächst aus Gleichung (3) die Bogenlänge der Kurve und setzt diese gleich der Länge des durch die Kraft H verlängerten Radialdrahtes. Die Bogenlänge s der Seilkurve ist bestimmt durch

$$s = \int_0^r d x \sqrt{1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2} ;$$

wofür man mit hinreichender Genauigkeit setzen kann:

$$s = \int_0^r \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right] d\,x\,.$$

Aus der Gleichung (3) erhält man:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{P}{3\,H\,r^2}\,(3\,x^2 - r^2).$$

Damit wird

$$s = r\left(1 + \frac{2\,P^2}{45\,H^2}\right) \quad . \;.\;. \quad (4).$$

Die Bogenlänge ist aber auch gleich der Länge des verlängerten Radialdrahtes. Als dehnende Kraft kann mit genügender Genauigkeit der Horizontalzug H eingeführt werden. Die ursprüngliche Länge des Radialdrahtes war R, daher ist dessen Verlängerung:

$$\varDelta R = \frac{R\,H}{E\,F};$$

die Länge des deformierten Drahtes ist demnach:

$$s = R\left(1 + \frac{H}{E\,F}\right) \quad . \;.\;. \quad (5).$$

Aus der Gleichung von (4) und (5) folgt die erste Gleichung zwischen H und r

$$r\left(1 + \frac{2\,P^2}{45\,H^2}\right) = R\left(1 + \frac{H}{E\,F}\right) \qquad (6).$$

Eine zweite Beziehung stellt man so auf: Ist a die ursprüngliche und b die verkürzte Länge eines Umfangstabes, so gilt zwischen beiden Größen die Beziehung:

$$r = \frac{R\,b}{a} \quad . \;.\;.\;. \quad (7).$$

Bezeichnet S die im Umfangstabe wirkende Druckkraft, so ist die Verkürzung:

$$\varDelta a = \frac{S\,a}{E_1\,F_1}$$

und daher die Länge des verkürzten Stabes

$$b = a\left(1 - \frac{S\,a}{E_1\,F_1}\right) \quad . \;.\;. \quad (8).$$

Die Spannung S in den Umfangstäben ist aber abhängig von der Spannung H in den Drähten. Aus einer Kräftezerlegung, Fig. 3, folgt

$$S = \frac{H}{2\sin\alpha/2} \quad . \;.\;.\;. \quad (9).$$

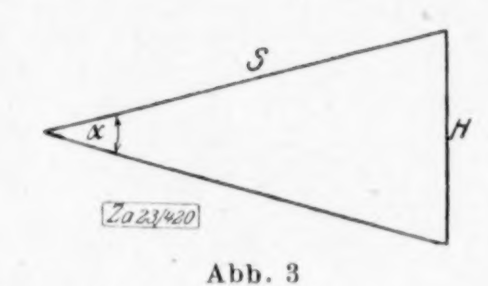


Abb. 3

Setzt man diesen Wert in Gleichung (8) ein, so wird:

$$b = a\left(1 - \frac{H}{2\,E_1\,F_1\sin\alpha/2}\right);$$

und nach Gleichung (7):

$$r = R\left(1 - \frac{H}{2\,E_1\,F_1\sin\alpha/2}\right) \quad . \;(10).$$

Mit der Gleichung (6) folgt nun die Bestimmungsgleichung für H:

$$R\left(1 - \frac{H}{2\,E_1\,F_1\sin\alpha/2}\right)\left(1 + \frac{2\,P^2}{45\,H^2}\right) = R\left(1 + \frac{H}{E\,F}\right)$$

oder geordnet:

$$H^3\left(\frac{1}{E\,F} + \frac{1}{2\,E_1\,F_1\sin\alpha/2}\right) + H\,\frac{P^2}{45\,E_1\,F_1\sin\alpha/2} = \frac{2\,P^2}{45} \qquad (11).$$

Beispiel:

Gegeben:

$R = 12{,}0$ m, $p = 11$ mm Druck $= \dfrac{11 \cdot 1{,}03}{760}$,

$\alpha = 8^0$, $E = 750\,000$, $E_1 = 600\,000$ kg/cm², $F = 1{,}5$ cm², $F_1 = 3$ cm²,

$$P = \frac{1}{2}\;\frac{1200 \cdot 1200 \cdot 11 \cdot 1{,}03}{760}\sin 8^0 = 1490 \text{ kg}.$$

Koeffizienten der Gl. (11):

$$\frac{2\,E_1\,F_1\sin\alpha/2 + E\,F}{2\,E_1\,E\,F_1\,F\sin\alpha/2} = 1288 \cdot 10^{-9},$$

$$\frac{P^2}{45\,E_1\,F_1\sin\alpha/2} = 0{,}394, \qquad \frac{2\,P^2}{45} = 99\,180.$$

Aus der Gleichung:

$$1288 \cdot 10^{-9}\,H^3 + 0{,}394\,H = 99\,180 \text{ folgt:}$$

$$H = 4230 \text{ kg}.$$

Eßlingen a. N. H. Treiber. 279

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die Sortiment-Abteilung des VDI-Verlages, Berlin SW 19, Beuthstraße 7, zu beziehen.)

Dr. phil., Dr.-Ing. e. h. OSC. **KNOBLAUCH,** o. Professor an der Technischen Hochschule München. Dipl.-Ing. E. **RAISCH,** Assistent am Laboratorium für Technische Physik der Technischen Hochschule München. Dipl.-Ing. H. **HAUSEN,** Technischer Physiker bei der Gesellschaft für Lindes Eismaschinen München-Höllriegelskreutz. Tabellen und Diagramme für Wasserdampf. Berechnet aus der spezifischen Wärme. Mit 4 Abbildungen im Text und Diagrammtafeln als Beilage. Verlag von R. Oldenbourg. München und Berlin. 1923. 32. S.

In der vorliegenden Schrift begrüßen wir dankbar eine für den praktischen Gebrauch bestimmte Zusammenfassung der Ergebnisse der bekannten »Münchner Versuche« über die thermischen Eigenschaften des Wasserdampfes,

die von Karl Linde angeregt und vom Laboratorium für technische Physik der Technischen Hochschule in München und dessen verdienstvollen Leiter Prof. Dr. Dr.-Ing. e. h. Knoblauch in jahrelanger Arbeit durchgeführt wurden.

Die Verfasser gehen bei der Verwertung der Versuchsergebnisse ebenso vor wie Eichelberg in seiner in Jahrg. 1922 S. 317 dieser Zeitschrift ausführlich besprochenen Arbeit; d. h. sie stellen eine empirische Formel für die Beziehung $C_p = f(pt)$ auf und leiten daraus in bekannter Weise die Zustandsgleichung, sowie Ausdrücke für den Wärmeinhalt und die Entropie ab. Alle Ergebnisse werden an dem eigenem und anderem Versuchsmaterial geprüft und in ausgezeichneter Uebereinstimmung gefunden. Auch mit den Ergebnissen Eichelbergs stehen sie innerhalb der Versuchsgrenzen in guter Uebereinstimmung.

Die von den Verf. gewählte Ausgangsgleichung hat die Form:

$$Cp = f(T) + \frac{C}{T - \varphi(p)}.$$

Für $f(T)$ und damit auch für den Grenzwert der spezifischen Wärme für den vollkommenen Gaszustand, verwenden die Verf. oberhalb und unterhalb 100° C verschiedene Formeln. Es scheint etwas zweifelhaft, ob der Genauigkeitsgrad der Versuche diese Komplikation rechtfertigt. Oberhalb 100° lautet die Formel:

$$Cp = 0{,}3391 + 0{,}000197\, T - \frac{12{,}8}{T - 256{,}4} + \frac{20{,}33}{T - 588{,}97 - 0{,}37354\, p + \dfrac{6310{,}3}{18{,}165 + p}}.$$

Die Verf. legen besonderen Wert darauf, daß ihre Formeln p und T nur in der ersten Potenz enthalten und daher für die numerische Ausrechnung besonders bequem sind. Dafür müssen sie aber in der Zustandsgleichung einen Logarithmus in den Kauf nehmen. Außerdem ist zu bedenken, daß die Formeln eigentlich nur für die einmalige Berechnung der Zahlentabellen und Diagramme in Frage kommen, die dann zur bequemen Lösung aller praktischen Aufgaben dienen. Mit den Formeln allein können naturgemäß nicht einmal die einfachsten praktischen Aufgaben gelöst werden.

Dem Werke sind Zahlentabellen für den Sättigungszustand in der üblichen Anordnung, ferner ein $i-s$- und ein $i-\log p$-Diagramm und graphische Darstellungen der C_p-Werte beigefügt. Tabellen und Diagramme sind über die Versuchsgrenzen (30 at) hinaus bis 60 at erweitert. Die Genauigkeit der extrapolierten Werte dürfte für die heutigen Anforderungen der Praxis völlig genügen.

Der Text des Werkchens bringt ferner Erläuterungen zu den gewählten empirischen Formeln und den aus ihnen mittels thermodynamischer Beziehungen abgeleiteten Gleichungen, Hilfstabellen zur Erleichterung der Rechnungen, tabellarische Vergleiche mit Versuchsergebnissen und endlich, gewissermaßen als Einleitung, ein Kapitel, das dem Leser den Inhalt des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik näher bringen soll. Mollier. 322

Dr.-Ing. H. BAER, Professor an der Technischen Hochschule in Breslau. Christmann-Baer, Grundzüge der Kinematik. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 164 Textabbildungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1923. VI + 138 S.

Nachdem die im Jahre 1910 erschienene erste Auflage seit einigen Jahren vergriffen war, liegt nunmehr die in einigen Punkten ergänzte zweite Auflage vor. Gegenüber der ersten ist sie um eine Anzahl von Beispielen und ferner um Maßstabsberechnungen vermehrt worden, die zweifellos zur Behebung häufig vorkommender Fehler beitragen werden. Die Anordnung des Stoffes ist dieselbe wie in der ersten Auflage. Nach einer Einführung, in der die Grundbegriffe erläutert werden, werden im ersten Hauptteil die Weg- und Geschwindigkeitsverhältnisse, im zweiten die Beschleunigungsverhältnisse und im dritten die Massenkräfte bewegter ebener Systeme behandelt.

Das Buch ist für Studierende und in der Praxis stehende Konstrukteure bestimmt und soll ihnen Mittel in die Hand geben, Getriebe der verschiedensten Arten hinsichtlich ihrer Bewegungsverhältnisse zu untersuchen. Dieser Zweck wird im großen und ganzen auch erfüllt, allerdings mit einigen Einschränkungen, die ich noch erwähnen werde. Das Buch enthält aber eine Reihe von Mängeln, die nicht dadurch gerechtfertigt werden können, daß, wie der Titel des Buches angibt, nur die Grundzüge der Kinematik gebracht werden sollen, die sich aber vielleicht damit erklären lassen, daß der bzw. die Verfasser, wie sie selbst im Vorwort sagen, für die Bearbeitung des Buches nur wenig Zeit zur Verfügung hatten.

Zunächst will ich auf einen Umstand hinweisen, der das vorliegende Buch im allgemeinen betrifft. Im Jahre 1913 ist das Buch »Die Maschinengetriebe« von W. Hartmann erschienen, der in seiner Vorrede u. a. folgendes schreibt (abgesehen von unwesentlichen Auslassungen): »Wenig angenehm ist es mir, daß ich noch auf eine eigentümliche Tatsache aufmerksam machen muß. Im Jahre 1910 haben die Herren A. Christmann und Dr.-Ing. H. Baer unter dem unzutreffenden Titel »Grundzüge der Kinematik« ein kleines Buch erscheinen lassen, das einen gewissen Teil meiner Figuren, meiner Bezeichnungen und meiner Behandlungsweise vorweg nimmt. Die häufig bis ins einzelne gehende Uebereinstimmung ist so offensichtlich, daß sie gar nicht abgeleugnet werden kann. Es könnte daher leicht die Meinung entstehen, daß ich aus jenem Buche abgeschrieben hätte. Das ist indessen nicht der Fall, die in Rede

stehenden Figuren und alles, was dazu gehört, sind viel älter; ich habe dieselben schon seit Jahren in meinen Vorlesungen an die Wandtafel gezeichnet, habe auch Lichtbilder davon unter meine Zuhörer verteilen lassen. Die »Gütergemeinschaft« ist also nicht dadurch zustande gekommen, daß ich mir etwas Fremdes angeeignet hätte. Ich mache trotz dieser »Vorwegnahme« auf die Originalität meiner Darstellungen vollen Anspruch.« Wenn schon die erste Auflage des Buches von Christmann-Baer keine benutzten Quellen angibt, so hätte man doch erwarten dürfen, daß in der vorliegenden zweiten Auflage wenigstens eine entsprechende Erklärung oder eine Stellungnahme zu den angeführten Auslassungen W. Hartmanns gebracht würde. Ich habe mich des Eindruckes nicht erwehren können, daß das Buch von Christmann-Baer sich ausschließlich auf die Vorlesungen W. Hartmanns stützt und daß keine anderen Hilfsmittel oder Quellen und insbesondere keine eigenen Arbeiten der Verfasser benutzt worden sind. Man trifft auf dieselben Mängel, die man bei W. Hartmann findet und die ich hier nur in einigen Punkten streifen kann. Vor allem ist die viel zu große Breite, mit der die Krümmungsverhältnisse behandelt werden, zu erwähnen. Dann sind von W. Hartmann die Begriffe der Bewegungssysteme erster und höherer Ordnung, die sich glücklicherweise sonst nicht eingebürgert haben, übernommen worden. Während aber W. Hartmann Definitionen dieser Begriffe gibt, sucht man in dem vorliegenden Buche vergeblich darnach, was darunter verstanden werden soll. Dazu kommt ein sinnstörender Druckfehler: Seite 7 ist als Ueberschrift angegeben: A. Das Bewegungssystem zweiter (statt erster) Ordnung. Ebenso wie bei W. Hartmann gewinnt der Leser auch bei dem vorliegenden Buche den Eindruck, als ob abgesehen von den älteren Vertretern der geometrischen Bewegungslehre Savary und Bobillier diese Wissenschaft vorwiegend auf den Arbeiten W. Hartmanns aufgebaut wäre, die im Rahmen des Gesamtgebietes doch nur eine verhältnismäßig untergeordnete Rolle spielen. Während überall angegeben ist, welche Konstruktionen von W. Hartmann herrühren, werden die hervorragenden Vertreter der geometrischen Bewegungslehre, von denen hier nur Burmester, Mohr, Grübler, Mehmke genannt seien, überhaupt nicht genannt, ihre Ergebnisse werden trotz ihrer grundlegenden Bedeutung entweder ganz übergangen oder ohne Namenangabe benutzt. Daß der Satz von der dreifachen Erzeugung der Koppelkurve von Roberts und daß die bekannte Beschleunigungskonstruktion im Schubkurbelgetriebe von Mohr herrührt, bleibt unerwähnt, um nur einige Beispiele zu nennen. Die von Grübler angegebene Konstruktion von Wendepunkten, sowie seine Erweiterung der Subnormalenkonstruktion der Beschleunigung auf die krummlinige Bewegung fehlen ganz, obwohl sie wegen ihrer Einfachheit und allgemeinen Anwendbarkeit unentbehrlich sind.

Wertvoll sind an dem Buche die zahlreichen Beispiele und die ausgezeichneten Figuren, durch die das Verständnis sehr erleichtert wird. Ein Literaturnachweis und ein alphabetisches Register hätten den Wert des Buches erhöht.

H. Alt, Dresden. 335

ALFRED **LECHNER,** Dr. techn., a. o. Professor der Technischen Hochschule in Wien. Enzyklopädie der Mechanik. **Lehrbuch für die Studierenden an Technischen Hochschulen und Universitäten. Verlag von L. W. Seidel & Sohn. Wien 1923. IV + 352 S.**

Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, in einem Bande von mäßigem Umfang eine Uebersicht über die Grundlehren der allgemeinen Mechanik, der technischen Statik, der Elastizitäts- und Festigkeitslehre, der Hydro- und Aeromechanik zu geben. Bei dieser Weite der Aufgabe und dem gewiß zuzugebenden Bedürfnis nach einem modernen Lehrbuch dieser Art wird man von vornherein geneigt sein, das Urteil in Einzelheiten möglichst milde zu halten und hier und dort kleine Versehen, mit Rücksicht auf die Schwierigkeit des ganzen Unternehmens, hingehen zu lassen. Die Ansprüche aber, die der Verfasser in dieser Richtung an einen auch nur einigermaßen kritischen Leser stellt, sind allzu große. Schon der 1. Abschnitt, der eine Einführung in die Vektorrechnung geben soll, erweckt die größten Bedenken. In einer Fußnote wird bemerkt, man unterscheide zwischen »freien und unfreien Vektoren«. Danach müßte man wohl annehmen, daß das im Text Gesagte sich auf beide Arten von Vektoren bezieht. Es folgen hier aber durcheinander Sätze aus der eigentlichen Vektorrechnung und solche, die der Stabrechnung angehören. Die Unklarheiten des 2. Abschnitts, in welchem zunächst der statische Kraftbegriff im Anschluß an Mach eingeführt werden soll (z. B. lautet eine Aussage, die den Kraftbegriff erklären soll: »Wirkt eine Kraft, so trachtet der Körper, sich in der Richtung der Kraft in Bewegung zu setzen«) wird man noch auf das Konto der nachzusehenden Mängel setzen können. Allein, je weiter das Studium fortschreitet, desto schwieriger wird es, auch nur einigermaßen einwandfreie Stellen zu finden. Daß das Prinzip von d'Alembert gänzlich mißverständlich dargestellt wird (S. 249) kann eigentlich nicht mehr überraschen. Nach dem, was der Verf. ausführt, bestünde das Prinzip in der Tat nur darin, daß man die beiden in der Newtonschen Gleichung gleichgesetzten Ausdrücke auf eine Seite bringt und ihre Differenz gleich Null setzt. Ganz sonderbar geht es in dem der Hydrodynamik gewidmeten Abschnitt zu. S. 302 wird erklärt: »Für eine Potentialströmung ist die Zirkulation Null«. Der Verf. weiß also offenbar nichts von Po-

tentialströmungen mit Zirkulation, wie sie gerade für die Anwendungen in der Turbinentheorie (auf die er ausdrücklich hinweist) und in der Fluglehre wichtig sind. Auf S. 304 wird unter der Ueberschrift »Helmholtzsche Wirbelsätze« folgendes ausgeführt. Es wird zunächst gezeigt, daß die Divergenz des Wirbelvektors Null ist. Daran schließt sich wörtlich folgende Behauptung: «Die Gleichung hat aber dieselbe Form wie die Kontinuitätsgleichung. Sie besagt, daß in einer Flüssigkeit weder Wirbel entstehen noch vernichtet werden können.« Hierauf wird aus dem Verschwinden der Divergenz ganz korrekt mit Hilfe des Gaußschen Satzes geschlossen, daß für jede Wirbelröhre das Produkt aus Querschnitt und Wirbelgröße konstant ist. Der Verf. fährt dann fort »das Produkt aus $w_1 f_1$ bezeichnet Helmholtz als die Wirbelstärke. Es wäre demnach die Wirbelstärke konstant.« Nach diesen Proben wird wohl jeder, der die Elemente der Hydromechanik schon kennt, zu der Ansicht gelangen, daß der Verf., statt ein Lehrbuch zu schreiben, noch selbst in die Schule gehen sollte.

Der Verlag, der das Buch sehr schön ausgestattet hat, ist erst kürzlich mit einigen ausgezeichneten Werken in die Reihe der mathematischen Verleger eingetreten. Er wird an dem vorliegenden Fall zu lernen haben, daß man auf diesem Gebiete nicht ohne ein ausreichendes Maß sachverständiger Vorsicht zu Werke gehen darf.

Mises. 400

Dr.-Ing. Dr. L. PRANDTL, o. Professor an der Universität Göttingen, unter Mitwirkung von Dr.-Ing. C. WIESELSBERGER und Dipl.-Ing Dr. phil. A. BETZ, Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. I. Lieferung, Zweite Auflage mit 91 Abb. und 2 Tafeln, 140 S. II. Lieferung mit 101 Abb. im Text, 80 S. Verlag von R. Oldenbourg. München und Berlin 1923.

Daß von dem ersten Heft dieser Versuchsberichte (angezeigt in dieser Zeitschrift Bd. 2 S. 76) schon so bald eine Neuauflage erforderlich wurde, wird niemanden wundernehmen, der die Bedeutung der darin niedergelegten wissenschaftlichen Arbeit zu schätzen weiß. In der II. Lieferung, die mit der neuen Auflage der I. zugleich ausgegeben wird, ist wieder eine Reihe von wertvollen Einzeluntersuchungen enthalten. Auf eine kurze theoretische Ausführung über den induzierten Widerstand von Mehrdeckern folgen eingehende Mitteilungen über eine Reihe von in der Göttinger Anstalt durchgeführten Versuchen. Hervorgehoben seien die Ermittlung des Luftwiderstands gerundeter und kantiger Körper, Messung der Druckverteilung über die Flügelfläche, Untersuchungen über Tragflügel mit unterteiltem Profil. Jeder Abschnitt ist mit zahlreichen Schaubildern und Tabellen über die einzelnen Versuchszahlen reich ausgestattet. Es ist kein Zweifel, daß auch die Fortsetzung der Veröffentlichungen auf die gleiche Wertung Anspruch machen kann wie das erste Heft.

Mises. 398

NACHRICHTEN

Protokoll des ersten Internationalen Kongresses für angewandte Mechanik. [1])

1. Vorbereitung und Eröffnung.

Der Kongreß, der zu Delft (Holland) vom 22. bis zum 28. April in den Gebäuden der Technischen Hochschule tagte, war durch die Initiative der Herren Prof. Ir. C. B. Biezeno, Prof. Dr. J. M. Burgers, Prof. Dr. J. A. Schouten (Delft) und Dr. Ir. E. B. Wolff (Amsterdam) zustande gekommen. Die Einladung zur Teilnahme, die Ende Dezember 1923 in etwa 500 Exemplaren versandt worden war, war außer von den Genannten unterzeichnet von Prof. J. S. Ames (Baltimore), Prof. L. Bairstow (London), Prof. V. Bjerknes (Bergen-Norwegen), Prof. E. G. Coker (London), Prof. Ph. Forchheimer (Wien), Dr. A. A. Griffith (Farnborough), Prof. Th. von Kármán (Aachen), Prof. T. Levi-Civita (Roma), Prof. R. von Mises (Berlin), Prof. C. W. Oseen (Uppsala), Prof. Th. Pöschl (Prag), Prof. L. Prandtl (Göttingen), Mr. R. V. Southwell (Teddington), Prof. A. Stodola (Zürich), Prof. G. I. Taylor (Cambridge).

Der Einladung folgten 214 Teilnehmer, die folgenden Ländern angehörten: Australien (1), Belgien (3), Bulgarien (1), Canada (1), Deutschland (54), England (14), Aegypten (1), Frankreich (1), Italien (3), Holland (105), Norwegen (3), Oesterreich (2), Polen (4), Rumänien (1), Rußland (7), Schottland (3), Tschecho-Slowakei (3), Türkei (1), Amerika (3), Schweden (2), Schweiz (1).

Der Kongreß wurde am 22. April abends in den Sälen des Bibliothekgebäudes der Technischen Hochschule eröffnet. Außer den Teilnehmern waren als offizielle Gäste des Kongreß-Komitees anwesend: Mr. M. I. Duparc, »chef van de Afdeeling Kunsten en Wetenschappen van het Departement van Onderwys, Kunsten en Wetenschappen« als Vertreter des Unterrichtsministeriums, Mr. A. J. L. van Beeck Calkoen, »chef van de Afdeeling Hooger Onderwys« des Unterrichtsministeriums, der Schriftführer des Kollegiums von Kura-

[1]) Vergl. auch die Nachrichten in dieser Zeitschrift Bd. 3, S. 483 und Bd. 4, S. 83/84 und 192. Für die Ueberlassung des vorstehend abgedruckten Protokolls ist der Herausgeber dem ausführenden Komitee zu Dank verpflichtet.

toren der Technischen Hochschule, der Vorsitzende und Schriftführer des »Koninklyk Instituut van Ingenieurs«, der Bürgermeister von Delft.

Der Kongreß wurde eröffnet durch zwei Ansprachen von Prof. Ir. C. B. Biezeno, dem Vorsitzenden des ausführenden Komitees, und von Mr. M. I. Duparc. Hr. Biezeno begrüßte, in holländischer Sprache beginnend, dann englisch, deutsch und französisch fortfahrend, die erschienenen Kongreßteilnehmer und Gäste. Er sprach seinen Dank an alle aus, die zum Zustandekommen des Kongresses beigetragen hatten, und hob besonders die Verdienste von Hrn. v. Kármán hervor, der durch die Veranstaltung der Innsbrucker Zusammenkunft 1922 den Boden für den Kongreß vorbereitet hatte. Hr. Duparc überbrachte im Namen des am Erscheinen verhinderten Unterrichtsministers dessen Willkommengrüße, die hauptsächlich der Genugtuung über den wahrhaft internationalen Charakter des Kongresses galten.

Diesen beiden Reden folgten noch einige geschäftliche Mitteilungen des Hrn. Dr. Ir. E. B. Wolff, worauf die Anwesenden noch längere Zeit als Gäste des Komitees beisammen blieben.

2. Erste allgemeine Sitzung.

Die erste allgemeine Sitzung am 23. April war der Behandlung von Problemen aus der Mechanik fester Körper gewidmet. Diese wie alle weiteren wissenschaftlichen Sitzungen fanden in dem »Gebouw voor Werktuig- en Scheepsbouwkunde« der Technischen Hochschule statt.

Vormittags: Vorsitzender: Prof. Dr. G. I. Taylor (Cambridge); Schriftführer: Dr. H. Hencky und J. J. Koch.

C. B. Biezeno (Delft): Graphical and Numerical Stress Determination in Beams and Plates. — Diskussion: F. A. Vening Meinesz (Amersfoort), R. Courant (Göttingen).

E. G. Coker (London): Some engineering problems of stress distribution. — Diskussion: G. I. Taylor (Cambridge), D. Dresden (Delft) und L. Baes (Brüssel).

A. A. Griffith (Farnborough): The soap-film method of solving stress problems.

L. Prandtl (Göttingen): Spannungsverteilung in plastischen Körpern (zusammenfassender Bericht).

Nachmittags: Vorsitzender: Dr. Ir. E. B. Wolff (Amsterdam); Schriftführer: Dr. H. Hencky und J. J. Koch.

A. A. Griffith (Farnborough): The theory of Rupture.

A. Joffe (Leningrad): Ueber die Festigkeit und die Deformation von Kristallen. — Diskussion: D. Dresden (Delft).

J. Czochralski (Frankfurt a. M.): Die Beziehungen der Metallographie zur physikalischen Forschung. — Diskussion: E. B. Wolff (Amsterdam), M. Polanyi (Berlin-Dahlem), E. Schiebold (ebenda), E. Schmid (ebenda).

Nach Beendigung der Nachmittagsvorträge fand ein Empfang durch den Akademischen Senat in dem Museum für Schiffsmodelle der Technischen Hochschule statt. Der Rector magnificus Prof. Ir. C. L. van der Bilt hielt eine in herzliche Worte gefaßte Begrüßungsansprache, auf die der Vorsitzende des ausführenden Komitees, Prof. Ir. C. B. Biezeno, antwortete.

3. Sitzung des Kongreßkomitees.

Am Abend desselben Tages versammelte sich in der Studentensozietät »Phoenix« das ausführende Komitee mit den Gelehrten, die die allgemeine Einladung zum Kongresse mitunterzeichnet hatten. Es waren erschienen die Herren Bairstow, Bjerknes, Coker, Forchheimer, Griffith, v. Kármán, Levi-Civita, v. Mises, Pöschl, Prandtl, Southwell, Taylor. (Die Herren Ames, Oseen und Stodola waren verhindert, dem Kongreß beizuwohnen.) Der Sitzung waren hinzugezogen die Herren Prof. A. A. Friedmann (Leningrad), Dr. J. C. Hunsaker (Amerika) und Prof. E. Meißner (Zürich). Beratungsgegenstände waren der Plan einer Wiederholung des Kongresses und die Herausgabe der Kongreßverhandlungen.

Nach längerer Aussprache wurde beschlossen, den Kongreß grundsätzlich alle 4 Jahre abzuhalten. Zum Zwecke einer regelmäßigen Abwechselung mit dem Internationalen Mathematiker-Kongreß, der in diesem Jahre in Toronto tagt und ebenfalls in einer Periode von 4 Jahren wiederholt wird, soll der nächste Mechanik-Kongreß schon im Herbst 1926 oder im Frühjahr 1927 stattfinden; der dritte Kongreß fällt dann in das Jahr 1930.

Als Ort des nächsten Kongresses wurde an erster Stelle Zürich, an zweiter Stelle Rom genannt; die definitive Entscheidung wurde einem Subkomitee übertragen, das aus den Herren Meißner, Levi-Civita, Biezeno und Burgers besteht.

Hinsichtlich der Verhandlungen des gegenwärtigen Kongresses wurde die Herausgabe eines Bandes von höchstens 500 Seiten beschlossen. Mit der Redaktion wurde das holländische ausführende Komitee beauftragt.

4. Erste Reihe von Sektionssitzungen.

Am 24. April fanden vormittags Sektionssitzungen statt, in denen Probleme aus der rationellen Mechanik, aus der Elastizitätslehre und aus der Hydro- und Aerodynamik behandelt wurden.

Sektion I. Vorsitzender: Prof. Dr. Ir. J. A. Schouten (Delft); Schriftführer: Dr. D. J. Struik und Frau Dr. R. Struik-Ramler.

H. Alt (Dresden): Kinematische Synthese (zusammenfassender Bericht).

J. Droste (Leiden): Eine Bemerkung zu den Variationsprinzipien der Mechanik und der Physik. — Diskussion: T. Levi-Civita (Rom),

G. Hamel (Berlin) und J. A. Schouten (Delft).

I. Tzénoff (Sofia): Une forme nouvelle des équations du mouvement des systèmes nonholonomes et son application dans la théorie des percussions. — Diskussion: G. Hamel (Berlin) und T. Levi-Civita (Rom).

R. von Mises (Berlin): Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik. — Diskussion: J. A. Schouten (Delft), E. Trefftz (Dresden), F. Emde (Stuttgart), H. Rode (Trondhjem).

Ph. Frank (Prag): Ueber die geometrische Deutung von Painlevés Theorie der reellen Bahnkurven. — Diskussion: G. Hamel (Berlin).

Sektion II. Vorsitzender: Prof. Ir. C. B. Biezeno (Delft); Schriftführer: Dr. H. Hencky und J. J. Koch.

Th. Wyß (Danzig-Langfuhr): Experimentelle Spannungsuntersuchungen an einem hakenförmigen Körper. — Diskussion: L. Föppl (München), K. Memmler (Berlin), D. Dresden (Delft), E. Schwerin (Berlin-Halensee), L. Baes (Brüssel).

E. Schwerin (Berlin-Halensee): Die Torsionsstabilität des dünnwandigen Rohres. — Diskussion: M. T. Huber (Lemberg), C. B. Biezeno (Delft), Th. v. Kármán (Aachen).

R. V. Southwell (Teddington): On the stability under shearing forces of a flat elastic strip.

R. Grammel (Stuttgart): Die Knickung von Schraubenfedern. — Diskussion: K. Memmler (Berlin), E. Nicolai (Leningrad), D. Dresden (Delft).

W. Hort (Berlin-Charlottenburg): Ueber die Schwingungen von Stäben und Platten.

K. Terzaghi (Konstantinopel): Die Theorie der hydrodynamischen Spannungen und ihre praktische Anwendung.

H. Reißner (Berlin-Charlottenburg): Ueber das Erddruckproblem und die F. Kötterschen Sätze.

Sektion III. Vorsitzender: Prof. Dr. J. M. Burgers (Delft); Schriftführer: Ir. C. Koning und Ir. J. Th. Thysse.

Nils Zeilon (Uppsala): On potential problems in the theory of fluid resistance. — Diskussion: J. M. Burgers (Delft).

S. Brodetzky (Leeds): Vortex motion. — Diskussion: Th. von Kármán (Aachen).

H. Solberg (Kristiania): Zum Turbulenzproblem. — Diskussion: L. Prandtl (Göttingen).

V. Bjerknes (Bergen): Die hydrodynamischen Fernkräfte und deren Zusammenhang mit den Auftriebskräften, die die Aeroplane tragen (mit Versuchen). — Diskussion: D. Riabouchinsky (Biarritz) und J. Ackeret (Göttingen).

A. Friedmann (Leningrad): Ueber einige hydrodynamische Arbeiten russischer Gelehrter (allgemeine Gleichungen der turbulenten Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit; Bedingungen der dynamischen Bewegungsmöglichkeit einer kompressiblen idealen Flüssigkeit; zur Theorie der Diskontinuitätsflächen in einer zähen kompressiblen Flüssigkeit). — Diskussion: Hergesell (Berlin).

H. Rehbock (Karlsruhe i. B.): Die Wasserwalzen als Regler des Energiehaushaltes der Wasserläufe.

Um $1^1/_2$ Uhr nachm. vereinigten sich die Kongressisten bei einem ihnen von der Stadt Delft angebotenen Frühstück. Nachdem der Bürgermeister von Delft an den Kongreß eine Ansprache gerichtet hatte, die von Prof. Ir. C. B. Biezeno mit einem Heiltrunk auf die Stadt Delft beantwortet wurde, übermittelte Prof. Dr. L. Prandtl (Göttingen) im Namen der auswärtigen Kongreßmitglieder den Dank für die in Holland empfangene Gastfreundschaft.

Ein Teil der Kongreßmitglieder machte nachmittags einen Ausflug nach Amsterdam, wo unter Führung von Dr. Ir. E. B. Wolff der »Ryksstudiedienst voor de Luchtvaart« besichtigt wurde.

5. Zweite allgemeine Sitzung.

Die zweite allgemeine Sitzung, die der Hydro- und Aerodynamik gewidmet war, fand am 25. April statt. Zu Beginn wurde vom Vorsitzenden des ausführenden Komitees darauf hingewiesen, daß an diesem Tage Felix Klein in Göttingen seinen fünfundsiebzigsten Geburtstag feiere und daß in wenigen Monaten in England der 100. Geburtstag von William Thomson gefeiert werden solle. Vom Komitee wurde der Vorschlag gemacht, aus diesen Anlässen an Klein und an die Royal Society in London Begrüßungstelegramme zu versenden. Dieser Vorschlag wurde von allen Anwesenden mit Begeisterung begrüßt.

Vormittagssitzung: Vorsitzender: Prof. Dr. Ph. Forchheimer (Wien); Schriftführer: Ir. C. Koning und Ir. J. Th. Thysse.

G. I. Taylor (Cambridge): Experiments with rotating fluids. — Diskussion: D. Riabouchinsky (Biarritz).

Th. von Kármán (Aachen): Die Stabilität der Laminarbewegung und die Theorie der Turbulenz.

J. M. Burgers (Delft): The motion of a fluid in the boundary layer along a plane surface.

Nachmittagssitzung: Vorsitzender: Prof. Dr. V. Bjerknes (Bergen); Schriftführer: Ir. C. Koning und Ir. J. Th. Thysse.

T. Levi-Civita (Rom): La détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie. — Diskussion: R. Courant (Göttingen).

E. Hogner (Stockholm): Ueber die Theorie der Schiffswellen und des Schiffswellenwiderstandes.

Sir Napier Shaw (London): The physical structure of the atmosphere, regarded from the dynamical point of view. — Diskussion: E. van Everdingen (de Bilt), Hergesell (Berlin), F. M. Exner (Wien), V. Bjerknes (Bergen).

Ein geselliges Zusammensein in der Studentensozietät »Phoenix« beschloß den Tag.

6. Zweite Reihe von Sektionssitzungen.

Am 26. April tagten die Sektionen zum zweiten Male.

Sektion I. Vorsitzender: Prof. Dr. R. von Mises (Berlin); Schriftführer: Dr. D. J. Struik und Frau Dr. R. Struik-Ramler.

H. P. Berlage jr. (Den Haag): Ueber seismische Schwingungen. — Diskussion: E. van Everdingen (de Bilt), A. N. Kriloff (London).

A. N. Kriloff (London): On the numerical integration of differential equations. — Diskussion: R. von Mises (Berlin), G. Hamel (Berlin), O. Blumenthal (Aachen).

H. Föttinger (Danzig-Zoppot): Ueber Maschinen zur Berechnung von Wirbel- und Quellfunktionen. — Diskussion: R. Courant (Göttingen).

R. Courant (Göttingen): Ueber das Ritzsche Verfahren zur Lösung von Randwertaufgaben. — Diskussion: E. Meißner (Zürich), C. B. Biezeno (Delft), F. Emde (Stuttgart), F. A. Vening Meinesz (Amersfoort).

F. A. Vening Meinesz (Amersfoort): Schwerkraftbestimmung auf dem Ozean mittels Pendelbeobachtungen in einem Unterseeboot. — Diskussion: E. Meißner (Zürich).

E. Pfeiffer (Stuttgart): Sperrungsvorgänge bei Gleitbewegung starrer Körper. — Diskussion: H. Reißner (Berlin-Charlottenburg).

Sektion II. Vorsitzender: Dr.-Ing. K. Terzaghi (Konstantinopel); Schriftführer: Dr. H. Hencky und J. J. Koch.

G. Masing (Berlin-Siemensstadt): Das Aufreißen von Messing durch innere Spannungen. — Diskussion: E. B. Wolff (Amsterdam), K. Terzaghi (Konstantinopel), J. van Liempt (Eindhoven).

B. P. Haigh (Greenwich): Theory of rupture in fatigue. — Diskussion: O. Föppl (Braunschweig).

H. Hencky (Delft): Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen. — Diskussion: L. Prandtl (Göttingen), B. P. Haigh (Greenwich), M. T. Huber (Lemberg), H. Reißner (Berlin-Charlottenburg), Th. von Kármán (Aachen).

A. Nádai (Göttingen): Beobachtungen der Gleitflächenbildung an plastischen Stoffen. — Diskussion: K. Memmler (Berlin).

E. Schmid (Berlin-Dahlem): Neuere Untersuchungen an Metallkristallen.

Jos. Geiger (Augsburg): Meßgeräte und Verfahren zur Untersuchung mechanischer, technisch besonders wichtiger Schwingungsvorgänge. (Gefolgt von einer Demonstration im Laboratorium für Verbrennungsmotoren des »Gebouw voor Werktuig- en Scheepsbouwkunde«).

Sektion III. Vorsitzender: Prof. Dr. L. Bairstow (London); Schriftführer: Ir. C. Koning und Ir. J. Th. Thysse.

J. J. Ide (Paris) liest eine Mitteilung von Max Munk (Washington): The simplifying assumptions, reducing the strict applicability of classical hydrodynamics to practical aeronautical computations.

T. Levi-Civita (Rom) referiert eine Mitteilung eingesandt von U. Cisotti (Mailand): Sur les mouvements de rotation d'un liquide visqueux. — Diskussion: G. Hamel (Berlin).

E. Hahn (Nancy): Note sur l'application aux turbomachines des théories modernes de hydrodynamique.

C. Witoszinsky (Warschau): Sur le principe de circulation.

C. Koning (Amsterdam): Einige Bemerkungen über nichtstationäre Strömungen an Tragflügeln. — Diskussion: L. Prandtl (Göttingen).

G. Kempf (Hamburg): Ueber den Reibungswiderstand von Flächen verschiedener Form.

A. G. von Baumhauer (Amsterdam): Some notes on helicopters. — Diskussion: G. Lachmann (Göttingen), Th von Kármán (Aachen).

7. Schluß des Kongresses.

Am Nachmittag des 26. April fand die Schlußsitzung des Kongresses statt. Prof. Ir. C. B. Biezeno hielt eine Ansprache, in der er einen Rückblick auf die erfolgreich verlaufene Tagung gab. Er machte Mitteilung von den Beschlüssen des Kongreßkomitees (s. oben), wonach der nächste Kongreß 1926 womöglich in Zürich stattfinden soll und die Herausgabe der Berichte dem holländischen ausführenden Komitee übertragen wird. Im Namen der Kongreßteilnehmer dankte Prof. R. von Mises (Berlin) dem ausführenden Komitee für die außerordentlichen Verdienste, die es sich um die Vorbereitung und Durchführung des Kongresses erworben hat; die fruchtbare Initiative der Delfter Herren sichere ihnen einen dauernden Ehrenplatz in der Geschichte der mechanischen Wissenschaft.

Der Tag wurde durch eine gemeinschaftliche Mahlzeit im Hotel »de Oude Doelen« im Haag beschlossen, die außer etwa 60 Gästen des ausführenden Komitees rund 80 Kongreßteilnehmer vereinigte. Unter den zahlreichen Tischreden seien die von Mr. A. J. L. van Beeck Calkoen, dem Vertreter der Holländischen Regierung, von Sir Napier Shaw als Vertreter der Kongreßteilnehmer und Prof. S. G. Everts, dem Vorsitzenden des »Koninklyk Instituut van Ingenieurs«, hervorgehoben.

Am 28. April fand der Kongreß seinen Abschluß in einem Besuch bei den »Philips' Gloeilampenfabrieken« und dem zugehörigen physikalischen Laboratorium zu Eindhoven; hierzu war der Kongreß in überaus gastfreier Weise von den »N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken« eingeladen worden. Die zahlreichen besonders schönen Experimente, die vorgeführt wurden, zeigten überzeugend, von welch großer Bedeutung die Unternehmungen dieses Labora-

toriums für die Wissenschaft vom Bau der Materie sind.

Der Bericht kann nicht schließen, ohne daß ausdrücklich hervorgehoben wird, wie sehr der Kongreß durch den ungezwungenen und freundschaftlichen Verkehr zwischen allen Anwesenden, zu welcher Nationalität sie auch gehörten, gekennzeichnet wurde. Das Kongreßkomitee gibt sich der Hoffnung hin, daß die Erinnerung, die den Besuchern des Delfter Kongresses von diesem freundschaftlichen Verkehr verbleiben wird, den internationalen wissenschaftlichen Beziehungen zugute kommen werde.

Von Hrn. Prof. Dr. Felix Klein erhielt das Komitee ein Schreiben, in dem er seinen Dank für die ihm am 25. April gebotenen Glückwünsche zum Ausdruck bringt. Auf die Depesche an die Royal Society in London kam ein Antwortschreiben von dem Vorsitzenden des »Kelvin Centenary Committee«, in dem dieser mitteilt, daß die Depesche auf der »Centenary Gathering« vorgelesen werden wird, und der Hoffnung Ausdruck gibt, daß der Kongreß auf dieser Versammlung vertreten sein möge.

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik. Der erweiterte Vorstand hat beschlossen, den Mitgliedsbeitrag für die Mitglieder im Inland mit Wirkung vom 1. Mai auf M 1.— festzusetzen. Die Mitglieder, die den Beitrag für 1923/24 noch nicht gezahlt haben, wollen ihn umgehend an den Geschäftsführer senden.

Die Gesamtzahl der Mitglieder betrug am 1. Juni 180.

In einer zwanglosen Aussprache, die während des Delfter Kongresses unter den dort anwesenden 7 Mitgliedern des erweiterten Vorstands stattfand, kam die Ansicht zur Geltung, auf der bevorstehenden Herbsttagung in Innsbruck die angewandte Mathematik in den Vordergrund treten zu lassen, nachdem die Mechanik in Delft ausführlich zur Sprache gekommen ist. Vorträge aus dem Gebiete der praktischen Analysis, der mathematischen Statistik usf. sind besonders erwünscht.

Die Eintragung der Satzungen in das Vereinsregister hat sich aus äußeren Gründen verzögert. Da inzwischen der Plan der Gründung von Ortsgruppen (oder größerer Zusammenschlüsse nach lokalen Gesichtspunkten) aufgetaucht ist, soll der nächsten Hauptversammlung, noch vor der Eintragung, eine Satzungsänderung in dieser Richtung vorgeschlagen werden.

Herbstversammlung in Innsbruck. Im Rahmen des 88. Naturforschertages, der vom 21. bis 27. September 1924 in Innsbruck stattfindet, soll auch die geschäftliche und wissenschaftliche Hauptversammlung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik abgehalten werden. Ueber die bevorzugten Verhandlungsgegenstände ist oben berichtet. Anmeldungen zu Vorträgen sind an den Geschäftsführer, Prof. v. Mises-Berlin zu richten. Um möglichst baldige Anmeldung wird ersucht, damit die Tagesordnung rechtzeitig fertiggestellt werden kann.

Aus der allgemeinen Tagesordnung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte sei hervorgehoben, daß am Dienstag, den 23. September, nachmittags, in der Sitzung der naturwissenschaftlichen Hauptgruppe neuere Probleme der Atom- und Molekularforschung in Vorträgen von Sommerfeld-München, Kramers-Kopenhagen, Kratzer-Münster i. W., Warburg-Berlin und Franck-Göttingen behandelt werden sollen. 428

Nächster Mechanik-Kongreß in Zürich. Das vom Delfter Kongreß eingesetzte kleine Komitee hat endgültig beschlossen, den nächsten Kongreß in Zürich stattfinden zu lassen. Die Herren Debye, Prasil, Meyer, Stodola und Rohn haben sich freundlichst bereit erklärt, die Vorarbeiten zu übernehmen.

Berichtigung.

In dem Aufsatz Th. P. Lesch, Einfluß der inneren Dämpfung auf die Festigkeit gegenüber Stößen, Heft 2, S. 124 bis 142, ist folgendes richtigzustellen. Zu Beginn muß es in der 4. und 5. Zeile heißen: »Reibung an den Auflagern« statt »Reibung beim Stoß«. Ferner: In Gl. (1) ist das zweite =Zeichen durch +Zeichen zu ersetzen. In Gl. (62) gehört der Wurzelausdruck in den Exponenten. In (73) und (91) soll 6 statt σ stehen. Nach (117) soll es heißen: obere Grenze »gleich l« statt »gleich Null«. S. 142 vor der letzten Gleichung ist einzufügen: »Für $n = 5$ erhält man:«

(Redaktionsschluß 30. Juni 1924.)

Verantwortlich: für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43; für den Anzeigenteil Fritz Noack, Berlin-Niederschönhausen.
VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin. — Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.